目　录

第一章

Banach 空间与 Banach 代数

算子函数论研究在一般抽象空间中取值的解析函数的重要性质．作为其基础，熟悉和掌握一般 Banach 空间和 Banach 代数的基本知识是十分必要的．这些基本知识在每一本泛函分析教程中都是可以找到的．为了方便读者，这里将罗列某些结果而不予证明．它们包括了关于 Banach 空间上有界线性算子的基本定理，关于一般拓扑向量空间上紧凸集的 Krein-Milman 定理，以及与算子谱理论直接有关的 Banach 代数的重要性质．特别地，我们还将介绍在 Banach 空间中取值的解析函数的某些基本知识．如果读者掌握了本章介绍的内容，对于阅读以下几章在预备知识方面就不会有太大的困难．

§1.1

Banach 空间的基本定理

以 Φ 表一标量域，如实数域 $\mathbf{R}$ 或复数域 $\mathbf{C}$，设 $\mathscr{X}$，$\mathscr{Y}$ 都是任意的点集，T 是从 $\mathscr{X}$ 到 $\mathscr{Y}$ 中的映射（算子），$A\subset\mathscr{X}$，$B\subset\mathscr{Y}$，记

$$T(A)=\{y;\ y=Tx,\ x\in A\},$$
$$T^{-1}(B)=\{x;\ y=Tx,\ y\in B\}.$$

称$T(A)$为集合 A 的像,$T^{-1}(B)$为集合B 的原像. 设$\mathscr{X}$,$\mathscr{Y}$ 是线性空间,$T:\mathscr{X}\to\mathscr{Y}$ 为映射. 我们说 T 在 $x_0\in\mathscr{X}$ 连续:如果对于任何 $x_n\in\mathscr{X}$,$x_n\to x_0$,则 $Tx_n\to Tx_0$;T 在 $\mathscr{X}$ 上连续:如果 T 在 $\mathscr{X}$ 的每一点都连续;T 为线性的:如果对于$\forall\ x_1,x_2\in\mathscr{X}$,都有 $T(\alpha x_1+\beta x_2)=\alpha Tx_1+\beta Tx_2(\alpha,\beta\in\Phi)$,特别当$\mathscr{Y}=\Phi$ 时,称 T 为 $\mathscr{X}$ 上的线性泛函. 对于线性赋范空间 $\mathscr{X}$ 和$\mathscr{Y}$,称线性算子T: $\mathscr{X}\to\mathscr{Y}$ 是有界的:如果对于 $\mathscr{X}$ 中的任一有界集 A,$T(A)$是$\mathscr{Y}$ 中的有界集.

由上述基本概念,我们容易得到如下几个等价条件,其证明可参见[20],[45],[71],[79].

定理 1.1.1 设$\mathscr{X}$,$\mathscr{Y}$ 是线性赋范空间,$T:\mathscr{X}\to\mathscr{Y}$ 是线性算子,则下列诸条件等价:

(1) T 在 $\mathscr{X}$ 的某一点 x_0 处连续;

(2) T 在 $\mathscr{X}$ 上连续;

(3) T 是有界算子;

(4) T 在 $\mathscr{X}$ 的某一点的有界邻域内有界,特别地,T 在 $\mathscr{X}$ 的单位球内有界;

(5) 存在 $\alpha>0$,成立着

$$\|Tx\|\leqslant\alpha\|x\|,(\forall\ x\in\mathscr{X}).$$

若$T=f$ 是$\mathscr{X}$ 上的线性泛函,并且 $f(x)\neq 0$,则以上诸条件还等价于

(6) $N(f)=\{x\in\mathscr{X};f(x)=0\}$是$\mathscr{X}$ 中的闭集;

(7) $N(f)$不在$\mathscr{X}$ 中稠密.

在以后的讨论中我们不仅要考虑单个的有界算子,而且更要考虑有界算子族. 在下面的讨论中我们设$\mathscr{X}$,$\mathscr{Y}$ 为线性赋范空间,记 $B(\mathscr{X},\mathscr{Y})$是从$\mathscr{X}$ 到$\mathscr{Y}$ 的有界线性算子族. 如果像定义函数空间的线性运算那样来定义 $B(\mathscr{X},\mathscr{Y})$中的加法与数乘的运算,则 $B(\mathscr{X},\mathscr{Y})$是线性空间. 当$\mathscr{X}=\mathscr{Y}$ 时,记 $B(\mathscr{X},\mathscr{Y})$为 $B(\mathscr{X})$.

定理 1.1.2　对于每个 $T\in B(\mathscr{X},\mathscr{Y})$，令

$$\|T\|=\sup_{\|x\|\leqslant 1}\|Tx\|.$$

则 $\|\cdot\|$ 是 $B(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ 上的范数，并且若 $\mathscr{Y}$ 是 Banach 空间，则 $B(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ 也是 Banach 空间.

下述诸定理在泛函分析理论中都是基本的：即共鸣定理、开映射定理，闭图像定理，Hahn-Banach 延拓定理以及隔离定理等．由于这些定理在一般泛函分析书中均有详细的论述，在此我们只将其结果列出，不加证明.

定理 1.1.3（共鸣定理）　设 $\mathscr{X},\mathscr{Y}$ 是线性赋范空间，$\{T_\lambda;\lambda\in\Lambda\}\subset B(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ 是一族有界线性算子．则 $\{T_\lambda;\lambda\in\Lambda\}$ 是一致有界的当且仅当它在 $\mathscr{X}$ 的某个第二纲集 E 上点点有界.

特别地，在 Banach 空间 $\mathscr{X}$ 上点点有界的线性算子族 $\{T_\lambda;\lambda\in\Lambda\}\subset B(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ 是一致有界的.

利用共鸣定理容易得到下面的 Banach-Steinhaus 定理.

定理 1.1.4　设 $\{T_n\}$ 是 Banach 空间 $\mathscr{X}$ 到线性赋范空间 $\mathscr{Y}$ 中的一列有界线性算子．若对于每个 $x\in\mathscr{X}$，$\lim\limits_{n\to\infty}T_nx$ 存在，则有 $T\in B(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ 使得 $Tx=\lim\limits_{n\to\infty}T_nx$，并且 $\|T\|\leqslant\varliminf\limits_{n\to\infty}\|T_n\|$.

设 $\mathscr{X},\mathscr{Y}$ 为线性赋范空间，$T:\mathscr{X}\to\mathscr{Y}$ 为线性算子．若 T 将 $\mathscr{X}$ 中的每个开集映射为 $\mathscr{Y}$ 中的开集，则称 T 为开算子（开映射）.

定理 1.1.5（开映射定理）　设 $\mathscr{X}$ 是 Banach 空间，$\mathscr{Y}$ 是线性赋范空间，$T:\mathscr{X}\to\mathscr{Y}$ 是有界线性算子，并且其像集 $R(T)$ 是 $\mathscr{Y}$ 中的第二纲集，则 T 必是开算子并且是到上的．特别地，若 $\mathscr{Y}$ 也是 Banach 空间，则有界线性算子 $T:\mathscr{X}\to\mathscr{Y}$ 是开算子.

利用上述的开映射定理立即可得下面的逆算子定理.

定理 1.1.6　设 $\mathscr{X}$ 是 Banach 空间，$\mathscr{Y}$ 是线性赋范空间，$T:\mathscr{X}\to\mathscr{Y}$ 是一一的有界线性算子，$T(\mathscr{X})$ 是 $\mathscr{Y}$ 中的第二纲集，则 T^{-1} 是定义在全空间 $\mathscr{Y}$ 上的有界线性算子，此时 $\mathscr{Y}$ 是 Banach 空

间.

利用逆算子定理我们容易验证对于 Banach 空间到 Banach 空间上的一一有界线性算子 T，必存在正数 a 与 b，使得对于任意的 x，均有 $a\|x\| \leqslant \|Tx\| \leqslant b\|x\|$；因此 Banach 空间上的任意两个可比较的范数一定是等价的.

设 $\mathscr{X}$,$\mathscr{Y}$ 为任意点集，$\mathscr{X}$ 与 $\mathscr{Y}$ 的积集是集合 $\mathscr{X} \times \mathscr{Y} = \{(x,y);\ x \in \mathscr{X},\ y \in \mathscr{Y}\}$. 若 $T: \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ 为某个映射，称集合

$$G(T) = \{(x,Tx);\ x \in \mathscr{X}\} \subset \mathscr{X} \times \mathscr{Y}$$

为 T 的图像. 若 $(\mathscr{X},\rho_1)$, $(\mathscr{Y},\rho_2)$ 为度量空间，以

$$\rho((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \rho_1(x_1,x_2) + \rho_2(y_1,y_2)$$

$(\forall\ (x_1,y_1),(x_2,y_2) \in \mathscr{X} \times \mathscr{Y})$ 作为 $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$ 上的度量函数，$\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$ 为度量空间. 称 $T: \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ 为闭映射：若 $G(T)$ 是 $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$ 中的闭集.

定理 1.1.7（**闭图像定理**） 设 $\mathscr{X}$,$\mathscr{Y}$ 是 Banach 空间，$T: \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ 是线性算子. 若 T 是闭算子，则 T 连续.

由闭图像定理容易验证从 Banach 空间到 Banach 空间上的闭算子同时也是开算子.

设 $D(T)$ 与 $D(T_1)$ 分别为算子 T 与 T_1 所定义的空间. 若 $D(T) \subset D(T_1)$，并且 $T_1(x) = T(x)$ $(\forall\ x \in D(T))$，则称算子 T_1 是 T 的延拓.

定理 1.1.8（**Hahn-Banach 定理**） 设 $\mathscr{X}$ 为复线性空间，$M \subset \mathscr{X}$ 为线性子空间，p 是 $\mathscr{X}$ 上的半范数，若 f_0 是 M 上的复线性泛函并且 $|f_0(x)| \leqslant p(x)$ $(\forall\ x \in M)$，则存在 $\mathscr{X}$ 上的线性泛函 f，使得 $|f(x)| \leqslant p(x)$ $(\forall\ x \in \mathscr{X})$，并且

$$f(x) = f_0(x) \quad (\forall\ x \in M).$$

特别地，若 f_0 在 M 上连续，则 f 在 $\mathscr{X}$ 上连续并且 $\|f\| = \|f_0\|$（称 f 是 f_0 的保范线性延拓）.

通常称 $\mathscr{X}$ 的子集 A 在超平面 $E=\{x;\ f(x)=a\}$ 的一侧，若 $A\subset\{x;\ f(x)\leqslant a\}$ 或者 $A\subset\{x;\ f(x)\geqslant a\}$. 称两个子集 A 和 B 被

超平面 E 隔离，若 A、B 分别属于 E 的两侧．

定理 1.1.9（隔离定理）　设 $\mathscr{X}$ 是（实或复）线性赋范空间，A，B 是 $\mathscr{X}$ 中的非空凸集，$A\cap B=\varnothing$．若 A 是紧集，B 是闭集，则存在 $f\in\mathscr{X}^*$，实数 r_1，r_2，$r_1<r_2$，使得

$$A\subset\{x;\mathrm{Re}f(x)\leqslant r_1\},B\subset\{x;\mathrm{Re}f(x)\geqslant r_2\}.$$

下面我们将叙述有关强收敛、弱收敛（w 收敛）和弱*收敛（w^* 收敛）的某些基本事实．以往所讲的范数收敛，有时又称为强收敛，并记为 $x_n\xrightarrow{s}x$．设 $\mathscr{X}$ 为线性赋范空间，$\mathscr{X}^*$ 是 $\mathscr{X}$ 的共轭空间，x_n，$x\in\mathscr{X}$．若对于每个 $f\in\mathscr{X}^*$，$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(x)$，则称 $\{x_n\}$ 弱收敛于 x，记为 $x_n\xrightarrow{w}x$ 或 $x=w\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}x_n$．显然，由 Hahn-Banach 定理容易验证弱收敛序列的极限是唯一的，并且 $x_n\xrightarrow{s}x$ 必有 $x_n\xrightarrow{w}x$，但逆不真．然而，我们有下面的定理．

定理 1.1.10　若 $x_n\xrightarrow{w}x_0$，则存在 $\{x_n\}$ 中元素的凸组合构成的序列 $\{y_n\}$，$y_n\xrightarrow{s}x_0$．

证明　令 $E=\mathrm{co}\{x_n\}$，即 $\{x_n\}$ 的凸包．则 $x_0\in\overline{E}$．否则，由凸集的隔离定理，对于紧集 $\{x_0\}$ 和闭凸集 $\overline{E}$，存在 $f\in\mathscr{X}^*$ 和 r_1，r_2 两个实数 $r_1<r_2$ 使得

$$\mathrm{Re}f(x_0)<r_1<r_2<\mathrm{Re}f(y),\forall\ y\in\overline{E},$$

特别地，取 $y=x_n$ 可知与 $x_n\xrightarrow{w}x_0$ 是矛盾的．故定理获证．　▌

定理 1.1.11　$x_n\xrightarrow{w}x$ 当且仅当 $\{\|x_n\|\}$ 有界并且存在 $G\subset\mathscr{X}^*$，$\mathrm{span}\{G\}$ 在 $\mathscr{X}^*$ 中稠密，并且对于每个 $f\in G$，$f(x_n)\to f(x)$ $(n\to\infty)$．

证明　若 $x_n\xrightarrow{w}x$，显然 $\{x_n\}$ 是 w 有界集．对于 $\mathscr{X}^*$ 上的连续线性泛函序列 y_n：$y_n(f)=f(x_n)$，应用共鸣定理知 $\{\|x_n\|\}$ 有界．从而必要性得证．

反之，设 $\|x_n\|\leqslant M(\forall\ n)$，不妨设 $\|x\|\leqslant M$．当 $f(x_n)\to f(x)$ 对于 G 中的所有 f 成立时，显然对于 $\mathrm{span}\{G\}$ 中的每个 f 亦

成立. 现在若 $f \in \mathscr{X}^*$，对于 $\forall\ \epsilon > 0$，取 $f' \in \mathrm{span}\{G\}$，使得 $\| f - f' \| < \frac{\epsilon}{3M}$，而对于 f'，存在 n_0，当 $n \geqslant n_0$ 时，

$$|f'(x_n) - f'(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

从而

$$|f(x_n) - f(x)| < \epsilon.$$

故 $x_n \xrightarrow{w} x$. ∎

设 $\mathscr{X}$ 为线性赋范空间，$\mathscr{X}^*$ 是 $\mathscr{X}$ 的共轭空间，$f_n, f \in \mathscr{X}^*$. 若对于 $\forall\ x \in \mathscr{X}$, $f_n(x) \to f(x)$ $(n \to \infty)$，则称 f_n 弱星收敛于 f，记为 $f_n \xrightarrow{w^*} f$，或 $f = w^*\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} f_n$. 显然，$w^*$ 收敛序列的极限是唯一的，并且对于 $f_n, f \in \mathscr{X}^*$，$f_n \xrightarrow{w} f$，必有 $f_n \xrightarrow{w^*} f$，其逆不真. 但对于 Banach 空间 $\mathscr{X}$ 的共轭空间 $\mathscr{X}^*$ 也有类似于 $\mathscr{X}$ 的定理 1.1.11 的结果，其证明亦类似.

定理 1.1.12 设 $\mathscr{X}$ 是 Banach 空间，$\mathscr{X}^*$ 是 $\mathscr{X}$ 的共轭空间，$f_n, f \in \mathscr{X}^*$，则 $f_n \xrightarrow{w^*} f$ 当且仅当 $\sup\limits_{n\geqslant 1} \| f_n \| < \infty$ 并且存在 $E \subset \mathscr{X}$，$\mathrm{span}\{E\}$ 在 $\mathscr{X}$ 中稠密，对于每个 $x \in E$，

$$f_n(x) \to f(x) \quad (n \to \infty).$$

§ 1.2

向量值解析函数与调和函数的基本性质

为了后面研究方便，有必要对以后讨论中常用的向量值或复值解析函数与调和函数的某些基本概念和主要结论作扼要的介绍.

1. 复值解析函数的有关性质

设 $f(z)$是在区域 $D \subset \mathbb{C}$ 内确定的单值复函数，并且 $z_0 \in D$.

如果对于$\forall\ \varepsilon>0$,存在$\delta>0$,当$z\in D$,$0<|z-z_0|<\delta$时,恒有

$$\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}-\alpha\right|<\varepsilon,$$

则称$f(z)$在z_0处可微(或可导),记$\alpha=f'(z_0)$;若$f(z)$在D内每一点可微,那么称$f(z)$在D内解析;若$f(z)$在区域G内解析,而闭区域$\overline{D}\subset G$,则称$f(z)$在$\overline{D}$上解析.

利用导数的定义容易得到函数$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$在区域D内解析的充分必要条件是$u(x,y)$与$v(x,y)$在D内可微,并且满足Cauchy-Riemann条件

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

此时

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}.$$

由此不难推出Cauchy定理以及Cauchy公式.

定理1.2.1(**Cauchy定理**)　对于在以简单闭曲线Γ为边界的有界闭区域上解析的函数$f(z)$,积分

$$\int_\Gamma f(z)dz=0,$$

其中沿Γ的积分是按逆时针方向而取的.

定理1.2.2　设D是以有限条简单闭曲线Γ为边界的有界区域,$f(z)$在D及Γ所组成的闭区域$\overline{D}$上解析.则在D内任一点z,

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta.\tag{1.2.1}$$

(1.2.1)称为Cauchy公式.

Cauchy公式表明对于在某些有界闭区域上的解析函数,在区域内任一点所取的值可用它在边界上的值表示出来.这一基本性质对于复值函数理论是非常重要的.以后我们将会看到它对于向量值或算子值函数也是非常重要的.

在定理 1.2.1 的假设下，由(1.2.1)式形式地在积分号下求导数，可推出 $f(z)$ 在 D 内有任意阶导数，并且

$$f^{(k)}(z_0)=\frac{k!}{2\pi i}\int_{\Gamma_\rho}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}dz,(k=0,1,2,\cdots) \quad (1.2.2)$$

其中 $\Gamma_\rho=\{z;|z-z_0|=\rho,0<\rho\leqslant\rho_0<+\infty\}\subset D$，以及

$$\frac{|f^{(k)}(z_0)|}{k!}\leqslant\frac{M(\rho)}{\rho^k},(k=0,1,2,\cdots)$$

其中 $M(\rho)=\max\limits_{|z-z_0|=\rho}|f(z)|$.

关于复值解析函数的 Taylor 展式是在整个复分析中非常有用的性质．为此我们证明如下定理．

定理 1.2.3 设函数 $f(z)$ 在圆盘 $U:|z-z_0|<R$ 内解析．则在 U 内，

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n. \quad (1.2.3)$$

证明 设 $z\in U$，以 z_0 为心，在 U 内作一圆 Γ，使 z 属于其内域，则

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta. \quad (1.2.4)$$

由于当 $\zeta\in\Gamma$ 时，$\left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right|=q<1$，因此

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{\zeta-z_0-(z-z_0)}=\frac{1}{\zeta-z_0}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{\zeta-z_0}}$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}, \quad (1.2.5)$$

上式右边的级数当 $\zeta\in\Gamma$ 时一致收敛．

将(1.2.5)代入(1.2.4)，然后逐项积分得

$$f(z)=\alpha_0+\alpha_1(z-z_0)+\cdots+\alpha_n(z-z_0)^n+\cdots,$$

其中

$$\alpha_n=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!},(n=0,1,2,\cdots).$$

由于 z 是 U 内任一点，故定理得证. ▌

复值函数的另外两个重要性质是最大模原理和 Schwarz 引理.

最大模原理 如果函数 $w=f(z)$ 在区域 D 内解析，并且 $|f(z)|$ 在 D 内某一点达到最大值，则 $f(z)$ 在 D 内恒为常数.

这一原理说明，在区域内不恒等于常数的解析函数，其模不可能在区域内达到最大值.

现在应用这一原理证明 Schwarz 引理. 关于 Schwarz 引理的各种情况下的推广和应用我们将在后面几章中分别进行深入讨论.

Schwarz 引理 设 $f(z)$ 是在开圆盘 $|z|<1$ 内解析的复值函数. 设 $f(0)=0$，并且当 $|z|<1$ 时，$|f(z)|<1$. 则

(1) 当 $|z|<1$ 时，$|f(z)|\leqslant|z|$；

(2) 若对于某一复数 $z_0(0<|z_0|<1)$，$|f(z_0)|=|z_0|$，那么在 $|z|<1$ 内

$$f(z)=\lambda z, \tag{1.2.6}$$

其中 λ 是一复常数，且 $|\lambda|=1$.

证明 由于 $f(0)=0$，$f(z)$ 在 $|z|<1$ 内有 Taylor 展式：

$$f(z)=a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n+\cdots=zg(z), \tag{1.2.7}$$

其中 $g(z)=a_1+a_2z+\cdots$ 在 $|z|<1$ 内解析. 由于当 $|z|<1$ 时，$|f(z)|<1$，所以对于 $|z|=r\ (0<r<1)$，我们有

$$|g(z)|=\left|\frac{f(z)}{z}\right|<\frac{1}{r}.$$

利用最大模原理，当 $|z|\leqslant r$ 时，仍有

$$|g(z)|<\frac{1}{r}.$$

令 $r\to1$，则得：当 $|z|<1$ 时，

$$|g(z)|\leqslant1. \tag{1.2.8}$$

于是当 $0<|z|<1$ 时，$\left|\dfrac{f(z)}{z}\right|\leqslant1$，亦即

$$|f(z)| \leqslant |z|. \tag{1.2.9}$$

由于 $f(0)=0$，则当 $z=0$ 时，(1.2.9)仍然成立．从而引理中的(1)得证．

设在某一点 $z_0(0<|z_0|<1)$，$|f(z_0)|=|z_0|$．于是由(1.2.8)，$|g(z)|$在$|z|<1$ 内一点 z_0 达到它的最大值 1．因此由最大模原理，在$|z|<1$ 内 $g(z)=\lambda$，其中 λ 是模为 1 的复常数．由此可见，当 $0<|z|<1$ 时，(1.2.6)成立．又由 $f(0)=0$，当 $z=0$ 时，(1.2.6)仍成立．故引理中的结论(2)获证． ∎

2. 调和函数的某些基本性质

设 $u(x,y)$为区域 D 内的二元实值函数．如果 $u=u(x,y)$在 D 内有连续的一阶及二阶偏导数并且满足偏微分方程(Laplace 方程)：

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$$

则称函数 $u(x,y)$为调和函数．容易验证：区域 D 内的解析函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$的实部和虚部都是 D 内的调和函数，并且 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$在单连通区域 D 内解析的充分必要条件是 $u(x,y)$ 及 $v(x,y)$ 在 D 内为共轭调和函数(即满足 Cauchy-Riemann 方程)．利用解析函数的 Cauchy 公式可导出调和函数的中值定理：

定理 1.2.4 如果 $u(z)$是在闭圆盘$|z-z_0|\leqslant\rho(0<\rho<+\infty)$上的调和函数，则

$$u(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(z_0+\rho e^{i\varphi})d\varphi. \tag{1.2.10}$$

显然，利用调和函数的中值定理，可导出与解析函数类似的最大模原理，即一个在区域 D 内不为常数的调和函数，不可能在 D 的内点达到其最大值．

设 D 是有界区域，∂D 表示 D 的边界，$\overline{D}$ 为 D 的闭包．定义在

D 内的实值连续函数 $g(z)$，对于每个区域 D_1 满足 $\overline{D_1}\subset D$，$u(z)$ 是任一个在 D_1 内调和、$\overline{D_1}$ 上连续的调和函数，如果

$$g(z)\leqslant u(z)\quad(z\in\partial D_1),$$

则在 D_1 内有 $g(z)\leqslant u(z)$．具有上述性质的函数 $g(z)$ 称为次调和函数．

定理 1.2.5　在 D 内的连续函数 $g(z)$ 是次调和的充分必要条件是对于每一个 $z_0\in D$，存在 $\rho_0>0$，使得当 $\{z;|z-z_0|<\rho_0\}\subset D$ 时，有

$$g(z_0)\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g(z_0+\rho e^{i\theta})d\theta\quad(\rho<\rho_0).\qquad(1.2.11)$$

证明　必要性的证明．

设圆 $|z-z_0|<\rho$ 含在 D 内，且 $u(z)$ 是在该圆内的调和函数，满足

$$u(z)=g(z)\quad(|z-z_0|=\rho),$$

则有

$$\begin{aligned}g(z_0)&\leqslant u(z_0)\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(z_0+\rho e^{i\theta})d\theta\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g(z_0+\rho e^{i\theta})d\theta.\end{aligned}$$

充分性的证明．

假设存在某区域 D_1，使得 $\overline{D_1}\subset D$ 且有调和函数 $u(z)$ 使得 $g(z)\leqslant u(z)(z\in\partial D_1)$．若在 D_1 内某些点处有 $g(z)>u(z)$，令

$$h(z)=g(z)-u(z),$$

并且设 $h(z)$ 在 $\overline{D_1}$ 内的集 E 上达到最大值 $m>0$．因为当 $z\in\partial D_1$ 时，$h(z)\leqslant 0$，所以 $E\subset D_1$．由于 E 是闭集，则对于点 $z_0\in E$ 没有圆形邻域整个包含在 E 内．因此存在一个序列 $\{\rho_n\}$，$\rho_n\to 0$，使得圆 $|z-z_0|<\rho_n$ 含在 D_1 内，而圆周 $|z-z_0|=\rho_n$ 不能完全含在 E 内，在该圆周的某一段弧上有 $h(z)<m$．从而有

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(z_0+\rho_n e^{i\theta})d\theta - u(z_0)$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(z_0+\rho_n e^{i\theta})d\theta$$
$$< m = h(z_0) = g(z_0) - u(z_0).$$

这与(1.2.11)式矛盾．证毕． ∎

显然，对于在区域 D 内解析的 $f(z)=u(z)+iv(z)$，$p>0$，$|f(z)|^p$ 与 $|u(z)|^p$ 在 D 内是次调和函数．

设 $F(z)$，$f(z)$ 在单位圆 $\Delta=\{z;|z|<1\}$ 内解析．如果存在 $\omega(z)$ 在 Δ 内解析，满足 $|\omega(z)|\leqslant|z|$ $(z\in\Delta)$，使得 $f(z)=F(\omega(z))$，则称 $f(z)$ 对于 $F(z)$ 是从属的，记为 $f\prec F$.

定理 1.2.6(**Littlewood 定理**) 设 $f(z)$ 和 $F(z)$ 在 Δ 内解析且 $f\prec F$，则

$$M_p(r,f)\leqslant M_p(r,F) \quad (0<p\leqslant+\infty),$$

其中 $M_p(r,f)=\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}}$.

证明 设 $G(z)$ 是在 Δ 内的次调和函数，令 $g(z)=G(\omega(z))$，其中 $\omega(z)$ 在 Δ 内解析，并且 $|\omega(z)|\leqslant|z|$，则

$$\int_0^{2\pi} g(re^{i\theta})d\theta \leqslant \int_0^{2\pi} G(re^{i\theta})d\theta. \tag{1.2.12}$$

事实上，设 $u(z)$ 是在 $D_1=\{z;|z|<r\}$ 内的调和函数，且在 $\partial\Delta$ 上 $G(z)=u(z)$，则有

$$G(z)\leqslant u(z) \quad (z\in D_1).$$

从而

$$g(z)\leqslant u_1(z)=u(\omega(z)) \quad (z\in D_1).$$

因此

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(re^{i\theta})d\theta \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_1(re^{i\theta})d\theta = u_1(0)=u(0)$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} G(re^{i\theta})d\theta$$

成立.

因为$|f(re^{i\theta})|^p$、$|F(re^{i\theta})|^p$为次调和函数，所以只要令$g(re^{i\theta})=|f(re^{i\theta})|^p$、$G(re^{i\theta})=|F(re^{i\theta})|^p$，应用(1.2.11)式，即可得出该定理中的结论. ∎

3. **向量值解析函数的某些性质**

下面我们主要讨论定义域在复平面上的某个区域D，而函数值是在Banach空间$\mathscr{X}$(或在Hilbert空间H)中的向量值函数$x(\zeta)$. 复值情况的许多定理对于向量值的情况仍然成立，但也有某些结论在向量值情况是不成立的. 在这里我们仅介绍我们以后讨论中经常用到的那些结果.

设$x(\zeta)$为定义在复平面的某个区域D上，取值于Banach空间$\mathscr{X}$中的函数，$\mathscr{X}^*$表示$\mathscr{X}$的共轭空间. 对于任意一个元素$x^*\in\mathscr{X}^*$，如果$x^*(x(\zeta))$是通常(复值)意义下的解析函数，则称$x(\zeta)$是D上的向量值解析函数. 关于向量值解析函数，我们也需要讨论它的(强)可微性. 为此我们首先给出下面的引理.

引理1.2.1 设$f(\zeta)$为区域D内任一通常的(复值)解析函数、S为D内任一紧子集. 则必存在一个常数$M(f;S)$，使得

$$\left|\frac{1}{\alpha-\beta}\left\{\frac{1}{\alpha}[f(\zeta+\alpha)-f(\zeta)]-\frac{1}{\beta}[f(\zeta+\beta)-f(\zeta)]\right\}\right|\leqslant M(f;S),$$

其中$\zeta,\zeta+\alpha,\zeta+\beta\in S$.

证明 设Γ为D内有限条简单闭的可求长曲线，使Γ与S的距离$d>0$. 因为

$$\frac{1}{\alpha\beta}\cdot\frac{1}{\tau-\zeta}+\frac{1}{\alpha(\alpha-\beta)(\tau-\zeta-\alpha)}-\frac{1}{\beta(\alpha-\beta)(\tau-\zeta-\beta)}=\frac{1}{(\tau-\zeta)(\tau-\zeta-\alpha)(\tau-\zeta-\beta)}.$$

由Cauchy积分公式得出

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\tau)d\tau}{(\tau-\zeta)(\tau-\zeta-\alpha)(\tau-\zeta-\beta)}$$
$$=\frac{1}{\alpha-\beta}\left\{\frac{1}{\alpha}[f(\zeta+\alpha)-f(\zeta)]-\frac{1}{\beta}[f(\zeta+\beta)-f(\zeta)]\right\},$$

所以

$$\left|\frac{1}{\alpha-\beta}\left\{\frac{1}{\alpha}[f(\zeta+\alpha)-f(\zeta)]-\frac{1}{\beta}[f(\zeta+\beta)-f(\zeta)]\right\}\right|$$
$$\leqslant\frac{1}{2\pi}\left|\int_{\Gamma}\frac{f(\tau)d\tau}{(\tau-\zeta)(\tau-\zeta-\alpha)(\tau-\zeta-\beta)}\right|$$
$$\leqslant\frac{1}{2\pi}\cdot\max_{\tau\in\Gamma}\left\{|f(\tau)|\cdot\frac{1}{d^3}\cdot l\right\},$$

其中 l 为 Γ 的长. 从而结论得证. ▌

设 $x(\zeta)$是定义在$[\alpha,\beta]$上、取值在 $\mathscr{X}$ 内的向量值函数, $g(\zeta)$ 是定义在同一区间上的数值函数, 以 $\pi(n;\sigma_i,\tau_i)$表示下面的分法:

$$\sigma_0=\alpha<\sigma_1<\cdots<\sigma_n=\beta,$$
$$\sigma_{i-1}\leqslant\tau_i\leqslant\sigma_i\quad(i=1,2,\cdots,n).$$

如果

$$\sum_{i=1}^{n}x(\tau_i)[g(\sigma_i)-g(\sigma_{i-1})],$$

当分划的最大小区间的长度 $\|\pi(n;\sigma_i,\tau_i)\|\to 0$ 时极限存在, 称其为 $x(\zeta)$关于 $g(\zeta)$的 Riemann-Stieltjes 积分, 记为

$$\int_{\alpha}^{\beta}x(\zeta)dg(\zeta).$$

由此定义了向量值函数的积分. 显然, 若 $x(\zeta)$在$[\alpha,\beta]$上是强连续的, $g(\zeta)$在$[\alpha,\beta]$上是有界变差的数值函数, 则积分 $\int_{\alpha}^{\beta}x(\zeta)d\,g(\zeta)$ 存在, 并且若 T 是 $\mathscr{X}$ 到 $\mathscr{Y}$ 的闭线性算子, $x(\zeta)$的值域在 T 的定义域 $D(T)$内, 则

$$T\left(\int_{\alpha}^{\beta}x(\zeta)dg(\zeta)\right)=\int_{\alpha}^{\beta}T[x(\zeta)]dg(\zeta).$$

利用此种积分和通常的复值情况的 Cauchy 定理容易推出关于向量值解析函数的 Cauchy 定理以及它的任意阶导数的公式.

定理 1.2.7 设 $x(\zeta)$是在区域 D 上的向量值解析函数, 取值

于 Banach 空间 $\mathscr{X}$，Γ 是 D 内的简单闭的可求长曲线，且 Γ 的内部属于 D. 则

$$\int_{\Gamma} x(\zeta)d\zeta=\theta, x^{(n)}(\zeta)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{x(\tau)}{(\tau-\zeta)^{n+1}}d\tau,$$

其中 ζ 当 τ 沿 Γ 的正向绕行一周时能使 $\mathrm{Arg}(\tau-\zeta)$ 增加 2π.

证明　1°　设曲线 Γ 的方程为 $\zeta=\zeta(\alpha)$，$(0\leqslant\alpha\leqslant 2\pi)$. 则 $\zeta(\alpha)$ 是连续的，并且是有界变差的. 又由 $x(\zeta)$ 在曲线 Γ 上是强连续的，则积分

$$\int_0^{2\pi} x[\zeta(\alpha)]d\zeta(\alpha)=\int_{\Gamma} x(\zeta)d\zeta$$

存在. 对于任一有界线性泛函 $x^*\in\mathscr{X}^*$，有

$$x^*\left[\int_{\Gamma} x(\zeta)d\zeta\right]=\int_{\Gamma} x^*[x(\zeta)]d\zeta$$

成立.

由于 Γ 的内部也在 D 内，$x^*[x(\zeta)]$ 是通常的解析函数. 于是利用通常的 Cauchy 定理可知

$$\int_{\Gamma} x^*[x(\zeta)]d\zeta=0,$$

即

$$x^*\left[\int_{\Gamma} x(\zeta)d\zeta\right]=0.$$

因此，由 x^* 的任意性，必有

$$\int_{\Gamma} x(\zeta)d\zeta=\theta,\ (\theta \text{ 为零元}).$$

2°　首先我们证明下面一个事实：

$$x(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{x(\zeta)}{\tau-\zeta}d\zeta. \tag{1.2.13}$$

事实上，对每一个 $\zeta\in D$，$\frac{x(\zeta)}{\tau-\zeta}$ 是 $\tau\in\Gamma$ 的强连续函数，从而积分 $\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{x(\zeta)}{\tau-\zeta}d\tau$ 存在，并且对于 $\forall\ x^*\in\mathscr{X}^*$，

$$x^*[x(\zeta)]=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{x^*[x(\zeta)]}{\tau-\zeta}d\tau$$

是 D 内通常的解析函数，所以(1.2.13)式成立.

因为对于 $\forall\ x^*\in\mathscr{X}^*$，有

$$\frac{1}{\alpha}\{x^*[x(\zeta+\alpha)]-x^*[x(\zeta)]\}=x^*\{\frac{1}{\alpha}[x(\zeta+\alpha)-x(\zeta)]\},$$

其中 $\zeta,\zeta+\alpha\in D$. 所以令 $\alpha\to 0$ 得到

$$\frac{d}{d\zeta}x^*[x(\zeta)]=x^*[x'(\zeta)].$$

利用数学归纳法可以得到对任意正整数 n，有

$$\frac{d^n}{d\zeta^n}x^*[x(\zeta)]=x^*[x^{(n)}(\zeta)].\tag{1.2.14}$$

而对于 $\forall\ x^*\in\mathscr{X}^*$，有

$$\frac{d^n}{d\zeta^n}x^*[x(\zeta)]=\frac{n!}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{x^*[x(\tau)]}{(\tau-\zeta)^{n+1}}d\tau,(n=0,1,2,\cdots).$$

于是由(2.1.13)与(2.1.14)式得

$$x^*[x^{(n)}(\zeta)]=x^*\left[\frac{n!}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{x(\tau)}{(\tau-\zeta)^{n+1}}d\tau\right].$$

由 x^* 的任意性得定理中的第二个等式. ∎

复值解析函数的 Cauchy-Hadamard 定理、Cauchy 估计式以及 Taylor 展式也可以推广到向量值的情况，其证明方法类似.

定理 1.2.8　对于取值于 Banach 空间 $\mathscr{X}$ 的幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(\zeta-\zeta_0)^n,(a_n\in\mathscr{X}),\tag{1.2.15}$$

令

$$\frac{1}{\rho}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\|a_n\|^{\frac{1}{n}},$$

则当 $|\zeta-\zeta_0|<\rho$ 时，级数(1.2.15)绝对收敛，当 $|\zeta-\zeta_0|>\rho$ 时，该级数发散. 对于任意一个满足 $0<\rho_1<\rho$ 的 ρ_1 当 $|\zeta-\zeta_0|<\rho_1$ 时，该级数一致收敛，并且其极限函数在 $|\zeta-\zeta_0|<\rho$ 内是向量值解析函数.

定理 1.2.9 如果 $x(\zeta)$ 在 $|\zeta-\zeta_0|<R$ 内是 $\mathscr{X}$ 值的解析函数，并且

$$\| x(\zeta) \| \leqslant M,(|\zeta-\zeta_0|<R, M \text{ 为常数}),$$

则

$$\| x^{(n)}(\zeta_0) \| \leqslant \frac{M \cdot n!}{R^n} (\text{Cauchy 估计式}).$$

定理 1.2.10 如果 $x(\zeta)$ 在 $|\zeta-\zeta_0|<R$ 内解析，则

$$x(\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{(n)}(\zeta_0)}{n!}(\zeta-\zeta_0)^n, \quad (|\zeta-\zeta_0|<R).$$

证明 对于 $\forall\ x^* \in \mathscr{X}^*$，都有

$$\frac{d^n}{d\zeta^n}\{x^*[x(\zeta)]\}=x^*[x^{(n)}(\zeta)].$$

由于 $x^*[x(\zeta)]$ 在 $|\zeta-\zeta_0|<R$ 内是通常的复值解析函数，因此

$$\begin{aligned} x^*[x(\zeta)] &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^*[x^{(n)}(\zeta_0)]}{n!}(\zeta-\zeta_0)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^*[x^{(n)}(\zeta_0)]}{n!}(\zeta-\zeta_0)^n. \end{aligned} \tag{1.2.16}$$

另外，对于 $\forall\ r<R$，存在常数 $M(r)$，使得

$$\| x(\zeta) \| \leqslant M(r),(|\zeta-\zeta_0|\leqslant r<R).$$

于是，由定理 1.2.9 得

$$\frac{1}{\rho}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\left\| \frac{x^{(n)}(\zeta_0)}{n!} \right\|^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{r}.$$

或 $r\leqslant\rho$，从而 $R\leqslant\rho$. 因此幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{(n)}(\zeta_0)}{n!}(\zeta-\zeta_0)^n$$

在 $|\zeta-\zeta_0|<R$ 内收敛(按范数收敛). 从而

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^*[x^{(n)}(\zeta_0)]}{n!}(\zeta-\zeta_0)^n \\ &= x^*\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{(n)}(\zeta_0)}{n!}(\zeta-\zeta_0)^n\right]. \end{aligned} \tag{1.2.17}$$

比较(1.2.16)与(1.2.17)式以及 x^* 的任意性得

$$x(\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{(n)}(\zeta_0)}{n!}(\zeta-\zeta_0)^n,(|\zeta-\zeta_0|<R).$$ ▌

利用通常的复值解析函数的 Schwarz 引理，容易证明向量值解析函数的 Schwarz 引理和最大模原理.

定理 1.2.11(Schwarz 引理) 设 $x(\zeta)$ 在 Δ 内是解析的，并且

$$\|x(\zeta)\|\leqslant M, x(0)=\theta, (M \text{ 为常数}),$$

则

$$\|x(\zeta)\|\leqslant M|\zeta|.$$

定理 1.2.12(最大模原理) 设向量值函数 $x(\zeta)$ 定义在单连通闭区域 $\overline{D}$ 上，其边界为 Γ，在 D 内解析并且在 $D\cup\Gamma$ 上强连续. 如果

$$\sup\{\|x(\zeta)\|;\zeta\in\Gamma\}=M,$$

则 $\|x(\zeta)\|=M$，或 $\|x(\zeta)\|<M,(\zeta\in D)$.

§ 1.3

Krein-Milman 定理

设 $\mathscr{X}$ 为向量空间. 如果赋予 $\mathscr{X}$ 一个拓扑满足如下条件：

(1) 由 $(x,y)\to x+y$ 定义的 $\mathscr{X}\times\mathscr{X}\to\mathscr{X}$ 的映射是连续的；

(2) 由 $(\alpha,x)\to\alpha x$ 定义的 $\Phi\times\mathscr{X}\to\mathscr{X}$ 的映射是连续的；

特别地，如果 $\mathscr{X}$ 的拓扑是由 $\mathscr{X}$ 上的半范数族 P 生成的并且 $\bigcap_{p\in P}\{x;p(x)=0\}=\{\theta\}$；则我们称 $\mathscr{X}$ 为拓扑向量空间. 所谓 $p:\mathscr{X}\to R^1$ 是半范数：如果

(i) $p(x)\geqslant 0$；

(ii) $p(\alpha x)=|\alpha|p(x),\forall\ x\in\mathscr{X},\alpha\in\Phi$；

(iii) $p(x+y)\leqslant p(x)+p(y),\forall\ x,y\in\mathscr{X}$ 成立的话.

命题 1.3.1 设 $\mathscr{X}$ 为拓扑向量空间并且 p 是 $\mathscr{X}$ 上的一个半范数．则下面的事实等价：

(1) p 是连续的；

(2) $\{x\in\mathscr{X};p(x)<1\}$ 是开的；

(3) $\theta\in\operatorname{int}\{x\in\mathscr{X};p(x)<1\}$；

(4) $\theta\in\operatorname{int}\{x\in\mathscr{X};p(x)\leqslant 1\}$；

(5) p 在 $x=\theta$ 处连续；

(6) 存在 $\mathscr{X}$ 的一个连续半范数 q 使得 $p\leqslant q$.

证明 显然(1)⇒(2)⇒(3)⇒(4).

(4)⇒(5). 显然(4)意味着 $\forall\ \varepsilon>0,\theta\in\operatorname{int}\{x\in\mathscr{X};p(x)\leqslant 1\}$. 所以，如果 $\{x_i\}$ 是 $\mathscr{X}$ 中收敛于 θ 的一个网并且 $\varepsilon>0$，则存在 i_0 使得对于 $i\geqslant i_0$，$x_i\in\{x;p(x)\leqslant\varepsilon\}$，即 $p(x_i)\leqslant\varepsilon\ (i\geqslant i_0)$. 故 p 在 $x=\theta$ 处连续．

(5)⇒(1). 如果 $x_i\to x$，则 $|p(x)-p(x_i)|\leqslant p(x-x_i)$. 由于 $x-x_i\to\theta$，于是(5)意味着 $p(x-x_i)\to 0$. 因此，$p(x_i)\to p(x)$.

(1)⇒(6)是显然的．现在只需证明(6)⇒(5). 事实上，如果 $x_i\to\theta$，则 $q(x_i)\to 0$. 但 $0\leqslant p(x_i)\leqslant q(x_i)$. 所以 $p(x_i)\to 0$. 故命题得证． ∎

命题 1.3.2 (1) A 为凸集的充分必要条件是若 $\{x_i\}_{i=1}^n\subset A$，$\{t_i\}_{i=1}^n\subset[0,1]$ 且 $\sum\limits_{i=1}^n t_i=1$，则 $\sum\limits_{i=1}^n t_ix_i\in A$.

(2) 若 $\{A_i;i\in I\}$ 是凸集族，则 $\bigcap\limits_{i\in I}A_i$ 是凸集．

设 $\mathscr{X}$ 为向量空间．如果 $A\subset\mathscr{X}$，则称 $\mathscr{X}$ 的所有包含 A 的凸子集的交集为 A 的凸包，并且记为 $\operatorname{co}(A)$. 如果 $\mathscr{X}$ 是拓扑向量空间，则称 $\mathscr{X}$ 的所有包含 A 的闭凸子集的交集为 A 的闭凸包，并且记为 $\overline{\operatorname{co}}(A)$. 显然，如果 $\mathscr{X}$ 是赋范空间，则 $f\in\mathscr{X}^*$，$\{x;|f(x)|\leqslant 1\}$ 和 $\{x;|f(x)|<1\}$ 均是 $\mathscr{X}$ 的凸子集．如果 $T:\mathscr{X}\to\mathscr{Y}$ 是线性映射并且 C 是 $\mathscr{Y}$ 的凸子集，则 $T^{-1}(C)$ 是 $\mathscr{X}$ 的凸子集．

定理 1.3.1 设 $\mathscr{X}$ 是拓扑向量空间，A 是 $\mathscr{X}$ 的凸子集．则

(1) $\overline{A}$ 是凸集；

(2) 若 $a\in \mathrm{int}A, b\in\overline{A}$，则$[a,b)\equiv\{tb+(1-t)a; 0\leqslant t<1\}\subset \mathrm{int}A$.

证明 1° 设 $a\in A, b\in\overline{A}$，并且 $0\leqslant t<1$. 若$\{x_i\}$是 A 中的一个网使得 $x_i\to b$，则 $tx_i+(1-t)a\to tb+(1-t)a$. 从而 $b\in\overline{A}$，并且 $a\in A$ 意味着$[a,b]\subset\overline{A}$. 因此 $\overline{A}$ 是凸集.

2° 为证(2)，固定 $t, 0<t<1$，并且令 $c=tb+(1-t)a$，其中 $a\in\mathrm{int}A, b\in\overline{A}$. 存在 $\mathscr{X}$ 的一个开集 V 使得 $\theta\in V$ 且 $a+V\subset A$. 因此，对于$\forall\ d\in A$，

$$\begin{aligned}A&\supset td+(1-t)(a+V)\\&=t(d-b)+tb+(1-t)(a+V)\\&=[t(d-b)+(1-t)V]+c.\end{aligned}\tag{1.3.1}$$

如果我们能证明存在 A 的元 d 使得 $\theta\in t(d-b)+(1-t)V=U$，则由(1.3.1)的包含关系以及 U 是开集可得 $c\in\mathrm{int}A$. 注意要找满足上述条件的 $d\in A$ 等价于找满足 $\theta\in t^{-1}(1-t)V+(d-b)$或 $d\in b-t^{-1}(1-t)V$ 的 $d\in A$. 但$\theta\in -t^{-1}(1-t)V$ 并且此集为开集，$b\in\overline{A}$. 所以这样的 d 一定存在. 故(2)得证. ▌

推论 1.3.1 如果 $A\subset\mathscr{X}$，则$\overline{\mathrm{co}}(A)$是 $\mathrm{co}(A)$的闭包.

设 K 是向量空间 $\mathscr{X}$ 的凸子集. 我们称 K 中的点 a 为 K 的强端点，如果对任一包含 a 的真开线节都不真包含于 K 中，其中真开线节为$(x_1,x_2)\equiv\{tx_1+(1-t)x_2; x_1\neq x_2, 0<t<1\}$. 记 K 的强端点集为 $\mathrm{ext}K$.

命题 1.3.3 如果 K 是向量空间 $\mathscr{X}$ 的凸子集并且 $a\in K$，则如下事实等价：

(1) $a\in\mathrm{ext}K$.

(2) 若 $x_1,x_2\in\mathscr{X}, a=\frac{1}{2}(x_1+x_2)$，则或 $x_1\overline{\in}K$ 或 $x_2\overline{\in}K$ 或 $x_1=x_2=a$.

(3) 若 $x_1,x_2\in\mathscr{X}, 0<t<1, a=tx_1+(1-t)x_2$，则或 $x_1\overline{\in}K$

或 $x_2 \overline{\in} K$ 或 $x_1=x_2=a$.

(4) 若 $x_1,\cdots,x_n\in K, a\in \mathrm{co}\{x_1,\cdots,x_n\}$，则对于某个 k，$a=x_k$.

(5) $K\backslash\{a\}$是凸集.

定理 1.3.2(Krein-Milman 定理) 若 K 是拓扑向量空间 $\mathscr{X}$ 的非空紧凸子集，则 $\mathrm{ext}K\neq\varnothing$，并且 $K=\overline{\mathrm{co}}(\mathrm{ext}K)$.

证明 由命题 1.3.3(3)可知，点 a 是强端点当且仅当 $K\backslash\{a\}$ 是 K 的相对开凸子集. 因此，我们找出 K 的一个最大真相对开凸子集. 设 $\mathscr{U}$ 是 K 的所有真相对开凸子集族. 由于 $\mathscr{X}$ 是拓扑向量空间且 $K\neq\varnothing$(假设 K 不是单点集)，则 $\mathscr{U}\neq\varnothing$. 设 $\mathscr{U}_0$ 是 $\mathscr{U}$ 中的一个链并且令 $U_0=\{U;U\in\mathscr{U}_0\}$. 显然 U 是开的，并且由于 $\mathscr{U}_0$ 是链，所以 U_0 是开凸的. 如果 $U_0=K$，则 K 的紧性意味着存在 $\mathscr{U}_0$ 中的 U 使 $U=K$. 这与 U 的性质矛盾. 因此，$U_0\in\mathscr{U}$. 由 Zorn 引理，$\mathscr{U}$ 有最大元.

若 $x\in K, 0\leqslant\lambda\leqslant 1$，并且令 $T_{x,\lambda}:K\to K, T_{x,\lambda}(y)=\lambda y+(1-\lambda)x$，则 $T_{x,\lambda}$是 K 到 K 的连续映射，并且

$$T_{x,\lambda}\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i T_{x,\lambda}(y_i),$$

其中 $y_1,\cdots,y_n\in K, \alpha_1,\cdots,\alpha_n\geqslant 0$, $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1$. 这意味着 $T_{x,\lambda}$是 K 到 K 的一个仿射映射. 如果 $x\in U, 0\leqslant\lambda\leqslant 1$，则 $T_{x,\lambda}(U)\subset U$. 于是 $U\subset T_{x,\lambda}^{-1}(U)$并且 $T_{x,\lambda}^{-1}(U)$是 K 的开凸子集. 如果 $y\in\overline{U}\backslash U$，则由定理 1.3.1，$T_{x,\lambda}(y)\in(x,y)\subset U$. 所以 $\overline{U}\subset T_{x,\lambda}^{-1}(U)$，从而由 U 的最大性，$T_{x,\lambda}^{-1}(U)=K$，即

$$T_{x,\lambda}(K)\subset U, x\in U, 0\leqslant\lambda<1. \qquad (1.3.2)$$

于是我们得到下面的事实：

事实 1 如果 V 是 K 的任意开凸子集，则或 $V\cup U=U$ 或 $V\cup U=K$.

事实上，(1.3.2)意味着 $V\cup U$ 是开凸集. 所以，由 U 的最大

性可得事实 1.

现在我们利用事实 1 证明 $K\backslash U$ 是单点集. 事实上,若 $a,b\in K\backslash U$ 且 $a\neq b$,设 V_a,V_b 是 K 的两个不相连的开凸子集并且 $a\in V_a,b\in V_b$. 利用事实 1,由 $a\overline{\in}U$,得 $V_a\cup U=K$. 但 $b\overline{\in}V_b\cup U$. 矛盾. 因此,由命题 1.3.3(5)知,$K\backslash U=\{a\}$并且 $a\in \mathrm{ext}K$. 从而 $\mathrm{ext}K\neq\varnothing$.

为了证明 $K=\overline{\mathrm{co}}(\mathrm{ext}K)$,我们再证明下面一个事实:

事实 2 若 V 是 $\mathscr{X}$ 的开凸子集并且 $\mathrm{ext}K\subset V$,则 $K\subset V$.

事实上,若 V 是 $\mathscr{X}$ 的开凸子集,则 $V\cap K\in\mathscr{U}$ 并且 $V\cap K\subset U$,其中 U 为 $\mathscr{U}$ 的最大元. 但 $K\backslash U=\{a\}$,其中 $a\in\mathrm{ext}K$. 矛盾. 故事实 2 为真.

设 $E=\overline{\mathrm{co}}(\mathrm{ext}K)$. 如果 $x^*\in\mathscr{X}^*$,$\alpha\in R$,并且

$$E\subset\{x\in\mathscr{X};\mathrm{Re}x^*(x)<\alpha\}=V,$$

则由事实 2,$K\subset V$. 因此,由隔离性定理,$E=K$. 故定理获证. ▌

定理 1.3.3 如果 $\mathscr{X}$ 是拓扑向量空间,K 是 $\mathscr{X}$ 的紧凸子集,并且 $F\subset K$ 使得 $K=\overline{\mathrm{co}}(F)$,则 $\mathrm{ext}K\subset\overline{F}$.

证明 不妨设 F 是闭的. 若定理不真,即假设存在 K 的一个强端点 $x_0\overline{\in}F$,导出矛盾. 故设 p 是 $\mathscr{X}$ 上的一个连续半范数使得

$$F\cap\{x\in\mathscr{X};p(x-x_0)<1\}=\varnothing.$$

令 $U_0=\{x\in\mathscr{X};p(x)<\frac{1}{3}\}$,则$(x_0+U_0)\cap(F+U_0)=\varnothing$,从而 $x_0\overline{\in}\overline{F+U}$.

因为 F 是紧的,那么存在 $y_1,\cdots,y_n\in F$ 使得 $F\subset\bigcup_{k=1}^{n}(y_k+U_0)$. 设 $K_k=\overline{\mathrm{co}}(F\cap(y_k+U_0))$. 因此 $K_k\subset y_k+\overline{U}_0$,$K_k\subset K$. 于是,由 $K_1,\cdots,K_n$ 是紧凸的知$\overline{\mathrm{co}}(K_1\cup\cdots\cup K_n)=\mathrm{co}(K_1\cup\cdots\cup K_n)$. 因此

$$K=\overline{\mathrm{co}}(F)=\overline{\mathrm{co}}(K_1\cup\cdots\cup K_n).$$

由于 $x_0\in K$,

$$x_0 = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k, x_k \in K_k,$$
$$\alpha_k \geqslant 0, \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 1.$$

但 x_0 是 K 的强端点．于是 $x_0 = x_k \in K_k$(某个 k)．而这意味着 $x_0 \in K_k \subset y_k + \overline{U}_0 \subset \overline{F+U_0}$. 矛盾．故定理得证．∎

Krein-Milman 定理具有广泛的应用，特别是在算子函数的基本定理(樊氏定理 1)的证明中起到了非常重要的作用．

§1.4

Banach 代数

设 $\mathscr{A}$ 是 Φ 上的向量空间．称 $\mathscr{A}$ 为代数：如果在其上定义有乘积运算使得 $\mathscr{A}$ 成为一个环，并且

$$\alpha(ab) = (\alpha a)b = a(\alpha b), \alpha \in \Phi, a, b \in \mathscr{A}. \tag{1.4.1}$$

称 $\mathscr{A}$ 是 Banach 代数：如果赋予 $\mathscr{A}$ 一个范数 $\|\cdot\|$ 使其为 Banach空间并且对于任意 $a, b \in \mathscr{A}$，

$$\|ab\| \leqslant \|a\| \cdot \|b\|. \tag{1.4.2}$$

称 $\mathscr{A}$ 有单位元 e：如果 $\|e\| = 1$ 并且 $ea = ae = a, \forall a \in \mathscr{A}$. 若 $\mathscr{A}$ 有单位元 e，那么映射 $\Phi \to \mathscr{A}, \alpha \to \alpha e$，是 Φ 到 $\mathscr{A}$ 内的一个同构并且 $\|\alpha e\| = |\alpha|$. 因此单位元常常又记为 1.

命题 1.4.1　如果 $\mathscr{A}$ 是不含单位元的 Banach 代数，设 $\mathscr{A}_1 = \mathscr{A} \times \Phi$. 定义 $\mathscr{A}_1$ 的代数运算：

(1)　$(a, \alpha) + (b, \beta) = (a+b, \alpha+\beta)$；

(2)　$\beta(a, \alpha) = (\beta a, \beta\alpha)$；

(3)　$(a, \alpha)(b, \beta) = (ab + \alpha b + \beta a, \alpha\beta)$；

以及 $\mathscr{A}_1$ 上的范数 $\|\cdot\|$：

$$\|(a, \alpha)\| = \|a\| + |\alpha|. \tag{1.4.3}$$

则 $\mathscr{A}_1$ 在(1.3.3)式定义的范数和(1)—(3)定义的代数运算意义

下是具有单位元(0,1)的 Banach 代数并且 $a\to(a,0)$ 是 $\mathscr{A}$ 到 $\mathscr{A}_1$ 内的等距同构.

证明　我们仅只验证(1.3.2)式成立.若

$$(a,\alpha),(b,\beta)\in\mathscr{A}_1,$$

则

$$\begin{aligned}\|(a,\alpha)(b,\beta)\| &= \|(ab+\alpha b+\beta a,\alpha\beta)\| \\ &= \|ab+\alpha b+\beta a\|+|\alpha\beta| \\ &\leqslant \|a\|\,\|b\|+|\alpha|\,\|b\|+|\beta|\,\|a\|+|\alpha|\,|\beta| \\ &= \|(a,\alpha)\|\cdot\|(b,\beta)\|.\end{aligned}$$

故命题得证.　▌

例 1.4.1　设 $\mathscr{X}$ 是 Banach 空间，$\mathscr{A}=B(\mathscr{X},\mathscr{X})=B(\mathscr{X})$. 如果在 $\mathscr{A}$ 上定义乘积为算子的复合，则 $\mathscr{A}$ 是一Banach 代数并且有单位元 $e=I$(单位算子).

例 1.4.2　设 $\mathscr{X}$ 是无穷维 Banach 空间，$\mathscr{A}=B_0(\mathscr{X})$为 $\mathscr{X}$ 上的紧算子空间，则 $\mathscr{A}$ 是不含单位元的 Banach 代数.

命题 1.4.2　如果$\{\mathscr{A}_i\}$是一 Banach 代数族，则

$$\bigoplus_0\mathscr{A}_i\equiv\left\{x\in\prod_{i=1}^{\infty}\mathscr{A}_i;\ \|x(i)\|\to0,x=\{x(i)\},x(i)\in\mathscr{A}_i\right\}$$

以及

$$\bigoplus_\infty\mathscr{A}_i\equiv\left\{x\in\prod_{i=1}^{\infty}\mathscr{A}_i;\ \|x\|\equiv\sup_i\|x(i)\|<\infty\right\}$$

都是 Banach 代数.

设 $\mathscr{A}$ 是一个代数，$\mathscr{M}$ 是 $\mathscr{A}$ 的一个子代数.我们称 $\mathscr{M}$ 是 $\mathscr{A}$ 的左理想：如果对于任意 $a\in\mathscr{A}$，$x\in\mathscr{M}$ 都有 $ax\in\mathscr{M}$ 的话；$\mathscr{M}$ 是 $\mathscr{A}$ 的右理想：如果对于任意 $a\in\mathscr{A}$，$x\in\mathscr{M}$ 都有 $xa\in\mathscr{M}$；$\mathscr{M}$ 是 $\mathscr{A}$ 的理想：如果 $\mathscr{M}$ 既是左理想，又是右理想.设 $\mathscr{A}$ 为具有单位元 1 的代数.我们说 $a\in\mathscr{A}$ 是左可逆的：如果存在 $x\in\mathscr{A}$ 使得 $xa=1$；a 是右可逆的：如果存在 $x\in\mathscr{A}$ 使得 $ax=1$；a 是可逆的：如果 a 既是左可逆的，又是右可逆的.

命题 1.4.3

(1)　设 $\mathscr{A}$ 为具有单位元 1 的代数．如果 a 是可逆的，则存在唯一的元 $a^{-1}\in\mathscr{A}$，使得 $a^{-1}a=aa^{-1}=1$.

(2)　设 $\mathscr{M}$ 是 $\mathscr{A}$ 的左理想，$a\in\mathscr{M}$ 且 a 左可逆，则 $\mathscr{M}=\mathscr{A}$.

证明

1°　由于 a 可逆，则存在 $x,y\in\mathscr{A}$，使得 $xa=1=ay$，从而

$$y=1y=(xa)y=x(ay)=x1=x.$$

令 $a^{-1}=x=y$. 则 $aa^{-1}=a^{-1}a=1$. 唯一性是明显的．

2°　由 $a\in\mathscr{M}$ 左可逆，存在 $x\in\mathscr{A}$ 使 $xa=1$. 又 $\mathscr{M}$ 为左理想，所以 $1\in\mathscr{M}$. 故对于任意 $y\in\mathscr{A}$，$y=y1\in\mathscr{M}$，即 $\mathscr{M}=\mathscr{A}$. 证毕．∎

下面我们将给出关于含有单位元的 Banach 代数的某些结果，这些结果在后面的讨论中将起到很重要的作用．

引理 1.3.1　设 $\mathscr{A}$ 是含有单位元的 Banach 代数．如果 $x\in\mathscr{A}$ 并且 $\|x-1\|<1$，则 x 是可逆的．

证明　设 $y=1-x$，则 $\|y\|=r<1$. 因为 $\|y^n\|\leqslant\|y\|^n=r^n$，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|y^n\|<\infty$. 因此 $z=\sum\limits_{n=1}^{\infty}y^n$ 在 $\mathscr{A}$ 中收敛．如果 $z_n=1+z+\cdots+z^n$，则 $z_n(1-y)=1-y^{n+1}$. 但 $\|y^{n+1}\|\leqslant r^{n+1}$，所以 $y^{n+1}\to0(n\to\infty)$. 因此

$$z(1-y)=\lim_{n\to\infty}z_n(1-y)=1.$$

类似地，$(1-y)z=1$. 所以 $(1-y)$ 可逆且 $(1-y)^{-1}=z=\sum\limits_{n=1}^{\infty}y^n$. 但 $1-y=1-(1-x)=x$，故 x 可逆．∎

定理 1.4.1　设 $\mathscr{A}$ 是含有单位元的 Banach 代数并且

$G_l=\{a\in\mathscr{A};a$ 是左可逆的$\}$；

$G_r=\{a\in\mathscr{A};a$ 是右可逆的$\}$；

$G=\{a\in\mathscr{A};a$ 是可逆的$\}$；

则 G_l，G_r 和 G 都是 $\mathscr{A}$ 的开子集．映射 $G\to G$，$a\to a^{-1}$是连续的．

证明 设 $a_0\in G$，$b_0\in\mathscr{A}$ 使 $b_0a_0=1$．若 $\|a-a_0\|<\|b_0\|^{-1}$，则 $\|b_0a-1\|=\|b_0(a-a_0)\|<1$．由引理 1.4.1，$x=b_0a$ 是可逆的．如果 $b=x^{-1}b_0$，则 $ba=1$．因此 $G_l=\{a\in\mathscr{A};\|a-a_0\|<\|b_0\|^{-1}\}$，故 G_l 必为开集．同理可得 G_r 是开集．因为 $G=G_l\cap G_r$，所以 G 是开集．

为了证明映射 $G\to G$，$a\mapsto a^{-1}$是连续的，首先设$\{a_n\}$在 G 中并且 $a_n\to 1(n\to\infty)$．设 $0<\delta<1$，$\|a_n-1\|<\delta$．由引理 1.4.1，

$$a_n^{-1}=(1-(1-a_n))^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}(1-a_n)^k=1+\sum_{k=1}^{\infty}(1-a_n)^k.$$

因此

$$\|a_n^{-1}-1\|=\left\|\sum_{k=1}^{\infty}(1-a_n)^k\right\|\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\|1-a_n\|^k<\frac{\delta}{1-\delta}.$$

于是$\forall\ \varepsilon>0$，取 δ 使$\frac{\delta}{1-\delta}<\varepsilon$，则 $\|a_n-1\|<\delta$ 意味着 $\|a_n^{-1}-1\|<\varepsilon$．因此$\lim\limits_{n\to\infty}a_n^{-1}=1$．

现在设 $a\in G$，$\{a_n\}$是 G 中的序列且 $a_n\to a(n\to\infty)$．则 $a^{-1}a_n\to 1(n\to\infty)$．由前面所证 $a_n^{-1}a=(a^{-1}a_n)^{-1}\to 1(n\to\infty)$，故 $a_n^{-1}=a_n^{-1}aa^{-1}\to a^{-1}(n\to\infty)$．证毕． ∎

推论 1.4.1 设 $\mathscr{A}$ 是含有单位元的 Banach 代数．

(1) 若 $\|a-1\|<1$，则 $a^{-1}=\sum\limits_{k=1}^{\infty}(1-a)^k$．

(2) 若 $b_0a_0=1$，$\|a-a_0\|<\|b_0\|^{-1}$，则 a 左可逆．

设 $\mathscr{M}$ 是一个真理想．$\mathscr{M}$ 是最大理想：如果不存在更大的真理想包含 $\mathscr{M}$．

推论 1.4.2 设 $\mathscr{A}$ 是含有单位元的 Banach 代数．则

(1) 真左理想、真右理想或理想的闭包仍是真左理想、真右理想或理想；

(2) 最大左理想、最大右理想、理想是闭的．

证明 (1)的证明 设 $\mathscr{M}$ 是真左理想并且 G_l 是 $\mathscr{A}$ 的左可

逆元全体．由命题1.4.3(2)，$\mathscr{M}\cap G_l=\varnothing$．因此，$\mathscr{M}\subset\mathscr{A}\backslash G_l$．由定理1.4.1，$\mathscr{A}\backslash G_l$ 是闭的．从而，$\overline{\mathscr{M}}\subset\mathscr{A}\backslash G_l$，并且 $\overline{\mathscr{M}}\neq\mathscr{A}$．容易验证 $\overline{\mathscr{M}}$ 是真左理想．类似可证其他情况．

(2)的证明　如果 $\mathscr{M}$ 是最大左理想，则由(1)，$\overline{\mathscr{M}}$ 是真左理想．因此，由最大性，$\mathscr{M}=\overline{\mathscr{M}}$．故推论得证． ▌

设 $\mathscr{X}$ 是赋范空间，$\mathscr{M}$ 是 $\mathscr{X}$ 的线性流形，且有：

$$Q:\mathscr{X}\to\mathscr{X}/\mathscr{M},Qx=x+\mathscr{M}.$$

定义 $\mathscr{X}/\mathscr{M}$ 上的范数：

$$\|x+\mathscr{M}\|=\inf\{\|x+y\|;y\in\mathscr{M}\}.$$

则 $\mathscr{X}/\mathscr{M}$ 是赋范空间．称 $\mathscr{X}/\mathscr{M}$ 是 $\mathscr{X}$ 的商空间．设 $\mathscr{A}$ 是 Banach 代数，$\mathscr{M}$ 是真闭理想．则 $\mathscr{A}/\mathscr{M}$ 是代数．实际上，对于 $\forall x,y\in\mathscr{A}$，$(x+\mathscr{M})(y+\mathscr{M})=xy+\mathscr{M}$ 是 $\mathscr{A}/\mathscr{M}$ 上的乘积．

定理 1.4.2　若 $\mathscr{A}$ 是 Banach 代数，$\mathscr{M}$ 是 $\mathscr{A}$ 的真闭理想，则 $\mathscr{A}/\mathscr{M}$ 是 Banach 代数．如果 $\mathscr{A}$ 有单位元，则 $\mathscr{A}/\mathscr{M}$ 也有单位元．

证明　由于 $\mathscr{A}/\mathscr{M}$ 是 Banach 空间，也是一个代数．现在验证(1.4.2)式成立．

设 $x,y\in\mathscr{A},u,v\in\mathscr{M}$，则

$$(x+u)(y+v)=xy+(xv+uy+uv)\in xy+\mathscr{M}.$$

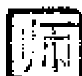
因此

$$\begin{aligned}\|(x+\mathscr{M})(y+\mathscr{M})\|&=\|xy+\mathscr{M}\|\\&\leqslant\|(x+u)(y+v)\|\leqslant\|x+u\|\cdot\|y+v\|.\end{aligned}$$

关于 $u,v\in\mathscr{M}$ 取下确界得

$$\|(x+\mathscr{M})(y+\mathscr{M})\|\leqslant\|x+\mathscr{M}\|\cdot\|y+\mathscr{M}\|.$$

故 $\mathscr{A}/\mathscr{M}$ 是 Banach 代数．定理的后一部分是显然的． ▌



第 二 章

Hilbert 空间上算子的谱理论

本章着重叙述 Hilbert 空间上有界线性算子的谱理论．Hilbert 空间是一种特殊类型的 Banach 空间，同时也是本书所述理论部分的主要框架．由于具有“内积”这种结构，使得对于它的研究变得更为方便，也更为深入，关于这一点随着以下各章内容的开展读者当能体会得愈益深刻．本章将首先讨论本质上与“正交性”共生的投影算子、共轭算子等概念及其基本性质，在就一般 Banach 空间引入有界线性算子的预解式和谱的概念之后将转入 Dunford 积分，它是在谱理论中常常使用的重要工具．最后将讨论正算子以及与整式序列的极限函数对应的算子的重要性质．本章部分内容仍是第一章预备知识的继续．

§2.1

投影算子与共轭算子

设 H 为内积空间，$E\subset H$ 为线性子空间，$x\in H$．若存在分解 $x=x_1+x_2$，其中 $x_1\in E$、$x_2\perp E$，则称 x_1 为 x 在 E 上的投影，记为 $P_E x=x_1$．容易验证对于 $y\in H$，$x_1\in E$，$P_E y=x_1$ 当且仅当 $\|y-x_1\|=\inf\limits_{x\in E}\|y-x\|$．由此我们可证明下面的投影定理．

定理 2.1.1(投影定理) 设 H 为 Hilbert 空间，$E\subset H$ 为闭线性子空间，则对于 $\forall\ y\in H$，$P_E y$ 存在且唯一.

证明 若 $y\in E$，则 $P_E y=y$. 若 $y\notin E$，取 $x_n\in E$，使得 $\|y-x_n\|\to\rho(y,E)=d$. 由于

$$\|x_m-x_n\|^2=\|(y-x_n)-(y-x_m)\|^2$$
$$=2(\|y-x_n\|^2+\|y-x_m\|^2)-4\left\|\frac{(y-x_n)+(y-x_m)}{2}\right\|^2$$
$$\leqslant 2(\|y-x_n\|^2+\|y-x_m\|^2)-4d^2\to 0(n\to\infty),$$

所以 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 序列. 不妨设 $x_n\to x_0$，E 是闭的，所以 $x_0\in E$. 于是

$$\|y-x_0\|=\lim_{n\to\infty}\|y-x_n\|=d=\inf\|y-x_0\|.$$

由此导出 $P_E y=x_0$. ∎

设 H 是 Hilbert 空间，$E\subset H$ 是闭线性子空间，记从 H 到 E 的投影算子是 P，则 P 是线性算子，$\|P\|\leqslant 1$ 并且若 $E\neq\{0\}$，则 $\|P\|=1$. 此时称 E 是 P 的投影子空间，即 $E=R(P)=N(I-P)$，$N(P)=R(I-P)$.

定理 2.1.2 设 H 是 Hilbert 空间，$E\subset H$ 是线性子空间，记 $E^\perp=\{x\in H;x\perp E\}$. 则

(1) $E^\perp$ 是 H 的闭线性子空间.

(2) 若 E 是闭的，则 $E^{\perp\perp}=E$.

(3) 若 E 是闭的，则 $H=E\oplus E^\perp$，即 $H=E+E^\perp$，$E\cap E^\perp=\{0\}$.

(4) 若 E 是闭的，$P:H\to E$ 是投影算子，则 $E^\perp=N(P)$.

证明 1° 若 $x,y\in E^\perp$，则对于 $\forall\ z\in E$，$x\perp z$，$y\perp z$. 从而

$$(\alpha x+\beta y,z)=\alpha(x,z)+\beta(y,z)=0.$$

故 $\alpha x+\beta y\in E^\perp$，即 $E^\perp$ 为线性子空间. 若 $x_n\in E^\perp$，$x_n\to x$，则对于 $\forall\ z\in E$，$(x_n,z)=0$. 由内积关于变元的连续性，$(x,z)=\lim\limits_{n\to\infty}(x_n,z)=0$，$x\perp z$，$x\in E^\perp$. 故 $E^\perp$ 是闭的.

2° 设 E 是闭的，则由 $E\perp E^\perp$ 知 $E\subset E^{\perp\perp}$. 另一方面，若 $x\in$

$E^{\perp\perp}$,则 $x\perp E^{\perp}$. 若 $x=x_1+x_2$, $x_1\in E$, $x_2\in E^{\perp}$,则 $(x_1,x_2)=0$. 于是

$$(x_2,x_2)=(x_1+x_2,x_2)=(x,x_2)=0.$$

故 $x_2=0$, $x=x_1\in E$,即 $E^{\perp\perp}\subset E$. 总之 $E=E^{\perp\perp}$.

3° 由投影定理,对于 $\forall\ x\in H$, $x=x_1+x_2$,其中 $x_1\in E$, $x_2\perp E$,即 $x_2\in E^{\perp}$. 从而 $H=E+E^{\perp}$. 另一方面, $E\cap E^{\perp}=\{0\}$. 故 $E\oplus E^{\perp}=H$.

4° 对于 $\forall\ x\in H$, $x=x_1+x_2$,其中 $x_1\in E$, $x_2\perp E$, $x\in E^{\perp}$ 当且仅当 $x_1=0$,即 $Px=0$ 或 $x\in N(P)$. 从而 $E^{\perp}=N(P)$. ▌

通常称 $E^{\perp}$ 是 E 的直交补空间. 由于(3)中的等式,亦称 H 是 E 与 $E^{\perp}$ 的直和. 此时也称 $E^{\perp}$ 是 E 的余子空间.

设 $\mathscr{X}$ 为线性空间, $T:\mathscr{X}\to\mathscr{X}$ 为线性算子, T 称为幂等的:若 $T^2=T$;设 H 为内积空间, $T\in B(H)$ 称为自共轭算子:若 $(Tx,y)=(x,Ty)$, $\forall\ x,y\in H$.

定理 2.1.3 设 H 为 Hilbert 空间, $P\in B(H)$,则下列诸条件等价:

(1) P 是投影算子.

(2) $P^2=P$ 并且 P 是自共轭的.

(3) $P^2=P$ 并且 $N(P)\perp R(P)$.

(4) 若 H 是复空间,以上还等价于 $(Px,x)=\|Px\|^2$ $(\forall\ x\in H)$.

证明 (1)⇒(2) 设 P 是从 H 到闭线性子空间 E 上的投影算子,对于 $\forall\ x\in H$, $Px\in E$,故 $P^2x=P(Px)=Px$. 于是 $P^2=P$.

对于 $\forall\ x,y\in H$, $x=x_1+x_2$, $y=y_1+y_2$, $x_1,y_1\in E$, $x_2,y_2\perp E$,于是

$$\begin{aligned}(Px,y)&=(x_1,y_1+y_2)=(x_1,y_1)\\&=(x_1+x_2,y_1)=(x,Py).\end{aligned}$$

故 P 自共轭.

(2)⇒(3) 对于 $\forall\ x\in N(P)$,则 $Px=0$, $y\in R(P)$,则存在 x_1

$\in H, y=Px_1$. 于是

$$(x,y)=(x,Px_1)=(Px,x_1)=0,$$

即 $N(P)\perp R(P)$.

(3)⇒(1)　令 $E=N(I-P)$, E 为 H 的闭线性子空间. 现在验证 P 是从 H 到 E 上的投影算子.

首先证明 $E=R(P)$. 实际上对于 $\forall\ y\in R(P)$, 存在 $x\in H$, $y=Px=P^2x$, 从而 $(I-P)(Px)=0$, 即 $(I-P)y=0$, $y\in N(I-P)$. 反之对于 $\forall\ y\in N(I-P)$, 则 $(I-P)y=0$, $y=Py\in R(P)$, 故 $R(P)=N(I-P)$.

对于 $\forall\ x\in H$, 记 $x=Px+(x-Px)$. 显然 $Px\in R(P)=E$. 又 $P(I-P)x=P(x-Px)=0$, 于是 $x-Px\in N(P)$. 由 $N(P)\perp R(P)$ 知 $x-Px\perp R(P)=E$. 所以 P 是从 H 到 E 的投影算子.

现在设 H 为复空间.

(2)⇒(4)　$\|Px\|^2=(Px,Px)=(P^2x,x)=(Px,x)$.

(4)⇒(2)　对于 H 上的任一线性算子 A, 下面极化恒等式成立:

$$\begin{aligned}4(Ax,y)=&(A(x+y),x+y)-(A(x-y),x-y)\\&+i(A(x+iy),x+iy)-i(A(x-iy),x-iy).\end{aligned}$$

若对于 $\forall\ x\in H$, $(Px,x)=\|Px\|^2$ 为实数, 令 $A=P$, 则计算可得:

$$(Px,y)=\overline{(Py,x)}=(x,Py),$$

所以 P 是自共轭的. 于是

$$(P^2x,x)=(Px,Px)=(Px,x)\quad(\forall\ x\in H).$$

令 $A=P^2-P$, 则 $(Ax,x)=0(\forall\ x\in H)$, 再利用极化恒等式得到

$$(Ax,y)=0, (\forall\ x,y\in H).$$

于是 $A=0$, 即 $P^2=P$. 故 P 是幂等的. (2)成立. 定理获证. ▌

若 P 为投影算子, 则 $(Px,x)=(P^2x,x)=(Px,Px)\geqslant 0$, 若 P_E, P_M 分别是从 H 到闭线性子空间 E 和 M 上的投影算子, 并且对于 $\forall\ x\in H$, $(P_Ex,x)\geqslant(P_Mx,x)$, 则记为 $P_E\geqslant P_M$(或 $P_M\leqslant P_E$).

定理 2.1.4　设 P_E, P_M 为 Hilbert 空间中的投影算子，则以下条件等价：

(1)　$P_E \geqslant P_M$.

(2)　$\| P_E x \| \geqslant \| P_M x \|$ $(\forall\ x \in H)$.

(3)　$E \supset M$.

(4)　$P_E P_M = P_M P_E = P_M$.

(5)　$P_E - P_M$ 为投影算子.

定理 2.1.5　设 P_E, P_M 为 Hilbert 空间 H 中的投影算子，则以下条件等价：

(1)　$E \perp M$.

(2)　$R(P_E) \perp R(P_M)$.

(3)　$P_E P_M = 0$.

(4)　$P_E + P_M$ 为投影算子.

定理 2.1.4 和 2.1.5 可利用投影算子定义和前面的结论推出，证明略去. 详细证明可参见[20].

命题 2.1.1　设 H 为 Hilbert 空间，$\{P_n\}$ 是 H 上的一列投影算子，并且 P_n 点点收敛于 P，即对于每个 $x \in H$，$\| P_n x - Px \| \to 0$. 则 P 为投影算子.

证明　对于每个 $x \in H$，$\lim\limits_{n \to \infty} P_n x = Px$. 由 Banach-Steinhaus 定理，$P$ 是有界线性算子. 又对于 $\forall\ y \in H$，

$$
\begin{aligned}
(Px, y) &= \lim_{n \to \infty} (P_n x, y) \\
&= \lim_{n \to \infty} (x, P_n y) = (x, Py).
\end{aligned}
$$

所以 P 是自共轭的. 另一方面

$$
\begin{aligned}
\| (P^2 - P)x \| &= \| (P^2 - P_n P + P_n P - P_n^2 + P_n - P)x \| \\
&\leqslant \| (P - P_n)(Px) \| + \| P_n \| \cdot \| (P - P_n)x \| \\
&\quad + \| (P_n - P)x \| \to 0 \quad (n \to \infty).
\end{aligned}
$$

故 $(P^2 - P)x = 0, \forall\ x \in H$，即 $P^2 = P$. 由定理 2.1.3，P 是投影算子. ▌

在给出共轭算子的概念和性质之前，我们首先证明下面两个定理．

定理 2.1.6（Riesz 表现定理） 设 H 为 Hilbert 空间．

（1） 对于每个 $y\in H$，$f(x)=(x,y)$ 是 H 上的连续线性泛函，并且 $\|f\|=\|y\|$．

（2） 若 f 是 H 上的连续线性泛函，则存在 $y\in H$，使得 $f(x)=(x,y)(\forall\, x\in H)$，$\|f\|=\|y\|$．

证明 1° f 的线性是明显的，并且

$$|f(x)|=|(x,y)|\leqslant\|x\|\cdot\|y\|,(\forall\, x\in H)$$

所以 $\|f\|\leqslant\|y\|$ 且 f 连续．若 $y=0$，显然 $\|f\|=0=\|y\|$．若 $y\neq 0$，取 $x=y$，则 $|f(y)|=(y,y)=\|y\|^2$，于是 $\|f(x)\|\geqslant\left\|f\left(\frac{y}{\|y\|}\right)\right\|=\|y\|$．故 $\|f\|=\|y\|$．

2° 设 $E=N(f)$，E 是 H 的闭线性子空间．若 $E=H$，则 $f=0$，取 $y=0$ 即可．若 $E\neq H$，则 $H=E\oplus E^{\perp}$，$E^{\perp}\neq\{0\}$．取 $z\in E^{\perp}$，$\|z\|=1$，则 $f(z)\neq 0$．令 $y=\overline{f(z)}z$，$y\in E^{\perp}$．

对于 $\forall\, x\in H$，$x-\frac{f(x)}{f(z)}z\in E$，于是

$$0=\left(x-\frac{f(x)}{f(z)}z,y\right)=(x,y)-f(x),$$

即对于 $\forall\, x\in H$，$f(x)=(x,y)$．由 1° 知 $\|f\|=\|y\|$． ▮

定理 2.1.7 设 H 为 Hilbert 空间，则对于每个 $A\in B(H)$，存在唯一的 $B\in B(H)$，使得

$$(Ax,y)=(x,By),\forall\, x,y\in H. \tag{2.1.1}$$

证明 对于任何 $y\in H$，因为

$$|(Ax,y)|\leqslant\|Ax\|\cdot\|y\|\leqslant\|A\|\cdot\|x\|\cdot\|y\|,$$

所以 $\varphi_y(x)=(Ax,y)$ 是 H 上的有界线性泛函，并由 Riesz 定理，存在 $z\in H$，使

$$(Ax,z)=(x,z),(\forall\, x\in H). \tag{2.1.2}$$

我们作算子 B 如下：对于 $y\in H$，令 $By=z$，其中 z 为使

(2.1.2)式成立,即算子 B 使其(2.1.1)式成立.

下面证明 B 是 H 到 H 的有界线性算子. 对于 $y_1, y_2 \in H, \alpha, \beta \in \Phi$,

$$\begin{aligned}(Ax, \alpha y_1 + \beta y_2) &= \bar{\alpha}(Ax, y_1) + \bar{\beta}(Ax, y_2) \\ &= \bar{\alpha}(x, By_1) + \bar{\beta}(x, By_2) \\ &= (x, \alpha By_1 + \beta By_2).\end{aligned}$$

因此 $B(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha By_1 + \beta By_2$,即 B 是线性算子. 另外,由 B 的定义,可知对任何 $y \in H$,有

$$\| By \| = \| \varphi_y \| \leqslant \| A \| \cdot \| y \|.$$

因此 B 是有界线性算子,而且 $\| B \| \leqslant \| A \|$.

显然使(2.1.1)式成立的算子 B 是由 A 所唯一确定的. ∎

定义 2.1.1 设 H 为 Hilbert 空间,$T \in B(H)$. 若存在 $T^* \in B(H)$,使得

$$(Tx, y) = (x, T^* y), (\forall\ x, y \in H).$$

称 T^* 为 T 的共轭算子或伴随算子.

定理 2.1.8 设 H 为 Hilbert 空间,$A, B \in B(H)$.

(1) $(\alpha A + \beta B)^* = \bar{\alpha} A^* + \bar{\beta} B^*$.

(2) $A^{**} = A$.

(3) $(AB)^* = B^* A^*$.

(4) $\| A^* \|^2 = \| A \|^2 = \| A^* A \|$.

证明 1° 对于$\forall\ x, y \in H, \alpha, \beta \in \Phi$,

$$\begin{aligned}((\alpha A + \beta B)x, y) &= (\alpha Ax + \beta Bx, y) \\ &= \alpha(Ax, y) + \beta(Bx, y) \\ &= \alpha(x, A^* y) + \beta(x, B^* y) \\ &= (x, (\bar{\alpha} A^* + \bar{\beta} B^*)y).\end{aligned}$$

故$(\alpha A + \beta B)^* = \bar{\alpha} A^* + \bar{\beta} B^*$.

2° 对于$\forall\ x, y \in H$,

$$(A^* y, x) = \overline{(x, A^* y)} = \overline{(Ax, y)} = (y, Ax).$$

故 $A = (A^*)^* = A^{**}$.

3° $A,B\in B(H)$，则 $AB\in B(H)$，从而 $(AB)^*$ 存在．对于 $\forall\ x,y\in H$，

$$(ABx,y)=(Bx,A^*y)=(x,B^*A^*y).$$

故 $(AB)^*=B^*A^*$．

4° 对于 $\forall\ x,y\in H$，$(Ax,y)=(x,A^*y)$．若 $Ax\neq 0$，则

$$\begin{aligned}\|Ax\|&=\frac{(Ax,Ax)}{\|Ax\|}=\frac{1}{\|Ax\|}(x,A^*Ax)\\&=\left(x,A^*\left(\frac{Ax}{\|Ax\|}\right)\right)\\&\leqslant\left\|A^*\left(\frac{Ax}{\|Ax\|}\right)\right\|\cdot\|x\|\\&\leqslant\|A^*\|\cdot\|x\|\end{aligned}$$

所以 $\|A\|\leqslant\|A^*\|$．又由 2°，$\|A^*\|\leqslant\|A^{**}\|=\|A\|$，于是 $\|A\|=\|A^*\|$．

上式同时又可以写成：

$$\|Ax\|^2=(x,A^*Ax)\leqslant\|A^*A\|\cdot\|x\|^2,$$

故有

$$\|A\|^2=\sup_{\|x\|\leqslant 1}\|Ax\|^2\leqslant\|A^*A\|.$$

显然 $\|A^*A\|\leqslant\|A^*\|\cdot\|A\|=\|A\|^2$．故

$$\|A^*\|^2=\|A\|^2=\|A^{**}\|.$$

定理证毕． ∎

§2.2

预解式和谱

设 $\mathscr{X}$ 为 Banach 空间，$B(\mathscr{X})$ 是 $\mathscr{X}$ 上全体有界线性算子构成的 Banach 代数（§1.4 例 1.4.1）．设 $A\in B(\mathscr{X})$ 是到上的，A^{-1} 存在并且是有界的，则称 A 为正则算子．利用 Banach 代数的定义及性质，容易验证下面两个定理．

定理 2.2.1 设 $\mathscr{X}$ 是 Banach 空间，$A\in B(\mathscr{X})$，则以下条件等价：

(1) A 是正则算子．

(2) 存在 $B\in B(\mathscr{X})$，$AB=BA=I$，即 $B=A^{-1}$．

(3) A 是到上的并且存在 $\alpha>0$，

$$\|Ax\|\geqslant\alpha\|x\|,(\forall\ x\in\mathscr{X}).$$

(4) A 是到上的一一的．

定理 2.2.2 设 $\mathscr{X}$ 为 Banach 空间，$A,B\in B(\mathscr{X})$．

(1) 若 A 为正则算子，则 A^{-1} 为正则算子，并且 $(A^{-1})^{-1}=A$．

(2) A、B 为正则算子，则 AB 为正则算子并且 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$．

(3) 若 A 为正则算子，则 A^* 为正则算子并且 $(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*$．

定理 2.2.3（**von Neumann**） 设 $\mathscr{X}$ 为 Banach 空间，$A\in B(\mathscr{X})$，$\lambda\in\mathbf{C}$．若 $\|A\|<|\lambda|$，则 $\lambda I-A$ 为正则算子．

证明 令 $B_n=\sum\limits_{i=0}^{n}\frac{A^i}{\lambda^{i+1}}$，这里 $A^2=AA$，$A^n=AA^{n-1}$，$A^0=I$．不妨设 $\frac{\|A\|}{|\lambda|}=\alpha$，则 $0\leqslant\alpha<1$，

$$\|B_n\|\leqslant\sum_{i=0}^{n}\frac{\|A^i\|}{|\lambda|^{i+1}}\leqslant\sum_{i=0}^{n}\frac{\|A\|^i}{|\lambda|^{i+1}}$$

$$\leqslant\frac{1}{|\lambda|(1-\alpha)}=\frac{1}{|\lambda|-\|A\|}.$$

所以 $B_n\in B(\mathscr{X})$．对于每个 $x\in\mathscr{X}$，若 $m>n$，则

$$\|B_mx-B_nx\|=\left\|\sum_{i=n+1}^{m}\frac{A^i}{\lambda^{i+1}}x\right\|\leqslant\frac{\alpha^{n+1}}{|\lambda|-\|A\|}\|x\|\to0(m,n\to\infty).$$

$\{B_nx\}$ 是 Cauchy 序列，$\mathscr{X}$ 完备，故 $\lim\limits_{n\to\infty}B_nx$ 存在．由 Banach-Steinhaus 定理，存在 $B\in B(\mathscr{X})$，使得

$$\lim_{n\to\infty}B_nx=Bx\quad(\forall\ x\in\mathscr{X}).\tag{2.2.1}$$

又由 $A\in B(\mathscr{X})$，$\lambda I-A\in B(\mathscr{X})$. 对于$\forall\ x\in\mathscr{X}$，

$$
\begin{aligned}
(\lambda I-A)Bx &= \lim_{n\to\infty}(\lambda I-A)B_n x \\
&= \lim_{n\to\infty}(\lambda I-A)\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{A^i}{\lambda^{i+1}}\right)x \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{A^i}{\lambda^i}-\sum_{i=0}^{n}\frac{A^{i+1}}{\lambda^{i+1}}\right)x \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(I-\frac{A^{n+1}}{\lambda^{n+1}}\right)x=Ix.
\end{aligned}
$$

即 $B(\lambda I-A)=I$. 则 $\lambda I-A$ 是正则算子并且 $B=(\lambda I-A)^{-1}$. ▌

由定理 2.2.3 的证明易知：

(1) 在范数收敛意义下，我们有

$$(\lambda I-A)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{\lambda^{n+1}}. \tag{2.2.2}$$

(2) $\|(\lambda I-A)^{-1}\|=\|B\|\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}\|B_n\|\leqslant\dfrac{1}{|\lambda|-\|A\|}$.

现在我们利用正则算子来定义算子的谱.

定义 2.2.1 设 $\mathscr{X}$ 是复赋范空间，$A:\mathscr{X}\to\mathscr{X}$ 是线性算子，$\lambda\in\mathbf{C}$.

(1) 若 $\lambda I-A$ 是正则算子，称 λ 是 A 的正则点，并称 $R(\lambda,A)=(\lambda I-A)^{-1}$是 A 的预解式或预解算子. A 的正则点的全体记为 $\rho(A)$，称 $\rho(A)$为 A 的正则集.

(2) 若 $\lambda I-A$ 不是正则算子，称 λ 是 A 的谱点，A 的谱点的全体记为 $\sigma(A)$，称 $\sigma(A)$为 A 的谱集.

(3) 若 $\lambda I-A$ 不是可逆的，称 λ 为 A 的特征值，A 的特征值的全体记为 $\sigma_p(A)$. 称 $\sigma_p(A)$为 A 的点谱.

(4) 若 $\lambda I-A$ 可逆，但不是到上的，或者 $\lambda I-A$ 可逆，到上但$(\lambda I-A)^{-1}$不是有界的，则称 λ 为 A 的连续谱，连续谱的全体记为 $\sigma_c(A)$，称 $\sigma_c(A)$是 A 的连续谱集.

(5) 设 $\lambda\in\sigma_p(A)$，若 $x\neq0$ 使得$(\lambda I-A)x=0$，则称 x 是 A 的相应于 λ 的特征向量. 称 $N(\lambda I-A)$是 A 相应于 λ 的特征向量

空间．

定理 2.2.4 设 $\mathscr{X}$ 为 Banach 空间，$A\in B(\mathscr{X})$.

(1) $\rho(A)$为开集．

(2) $\sigma(A)$是紧集．

证明 1° 若 $\lambda_0\in\rho(A)$，$\lambda_0 I-A$ 为正则算子．我们证明：只要$|\lambda-\lambda_0|<\dfrac{1}{\|(\lambda_0 I-A)^{-1}\|}$，$\lambda I-A$ 也为正则算子，即 $\lambda\in\rho(A)$.

记$\theta=\|(\lambda_0 I-A)^{-1}\|\,|\lambda-\lambda_0|$，则 $0\leqslant\theta<1$，考虑序列

$$B_n=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i(\lambda_0 I-A)^{-(i+1)}(\lambda-\lambda_0)^i.$$

容易证明$\{B_n\}$是 $B(\mathscr{X})$中的 Cauchy 序列．故存在 $B\in B(\mathscr{X})$，$\lim\limits_{n\to\infty}B_n=B$，并且

$$B=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i(\lambda_0 I-A)^{-(i+1)}(\lambda-\lambda_0)^i.$$

由于

$$\begin{aligned}&\|(\lambda I-A)B-(\lambda I-A)B_n\|\\&\leqslant\|\lambda I-A\|\cdot\|B-B_n\|\to 0\quad(n\to\infty).\end{aligned}$$

于是由计算可得：

$$(\lambda I-A)B=\lim_{n\to\infty}(\lambda I-A)B_n=I.$$

同理可得

$$B(\lambda I-A)=\lim_{n\to\infty}B_n(\lambda I-A)=I.$$

因此由定理 2.2.1，$\lambda I-A$ 是正则算子，$\lambda\in\rho(A)$. 故 $\rho(A)$是开集．

2° 由 von Neumann 定理，当$\|A\|<|\lambda|$时，$\lambda I-A$ 为正则算子，故 $\sigma(A)$是平面 **C** 中的有界集．又 $\sigma(A)=\mathbf{C}\backslash\rho(A)$是闭集．故 $\sigma(A)$为 **C** 中的紧集． ∎

定理 2.2.5(Gelfand-Mazur) 设 $\mathscr{X}$ 为非零 Banach 空间，$A\in B(\mathscr{X})$，则 $\sigma(A)\neq\varnothing$.

证明 对于$\forall\ \lambda\in\rho(A)$，$f\in B(\mathscr{X})^*$．则

$$F(\lambda)=f((\lambda I-A)^{-1})$$

为复值函数．由定理 2.2.4 以及 f 的连续性，

$$\begin{aligned}F(\lambda)&=f((\lambda I-A)^{-1})\\&=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i f((\lambda_0 I-A)^{-(i+1)})(\lambda-\lambda_0)^i\end{aligned}$$

至少在 $|\lambda-\lambda_0|<\dfrac{1}{\|(\lambda_0 I-A)^{-1}\|}$ 时成立．于是，$F(\lambda)$ 是 $\rho(A)$ 中的解析函数．若 $\sigma(A)=\varnothing$，则 $F(\lambda)$ 在整个复平面 $\mathbf{C}$ 上解析．根据 von Neumann 定理，当 $|\lambda|>\|A\|$ 时，

$$\|(\lambda I-A)^{-1}\|\leqslant\frac{1}{|\lambda|-\|A\|}.$$

从而

$$|f((\lambda I-A)^{-1})|\leqslant\frac{\|f\|}{|\lambda|-\|A\|}\to 0\quad(n\to\infty).\qquad(2.2.3)$$

$F(\lambda)$ 在 $\mathbf{C}$ 上有界，根据 Liouville 定理，$F(\lambda)$ 为常数．又由(2.2.3)式，$F(\lambda)\equiv 0$ ($\forall\ \lambda\in\mathbf{C}$).

若 $\sigma(A)=\varnothing$，则 $0\in\rho(A)$，从而 $A^{-1}\in B(\mathscr{X})$. 于是存在 $f\in B(\mathscr{X})^*$，$f(A^{-1})=\|A^{-1}\|\neq 0$. 设 F 是相应于 f 如上定义的复值函数，将 $\lambda=0$ 代入 $F(\lambda)$ 在 0 点的展开式得 $F(0)=-f(A^{-1})\neq 0$，矛盾．故 $\sigma(A)\neq\varnothing$. ∎

对于算子 A，我们令 $r(A)=\max\limits_{\lambda\in\sigma(A)}\{|\lambda|\}$，并称 $r(A)$ 为 A 的谱半径．

定理 2.2.6(Gelfand 定理) 设 $\mathscr{X}$ 为 Banach 空间，则

$$r(A)=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|A^n\|}.\qquad(2.2.4)$$

证明 1° 首先证明(2.2.4)式右端极限存在并且等于 $\inf\limits_{n\geqslant 1}\sqrt[n]{\|A^n\|}$. 令 $a=\inf\limits_{n\geqslant 1}\sqrt[n]{\|A^n\|}$. 显然

$$\varliminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|A^n\|}\geqslant\inf_{n\geqslant 1}\sqrt[n]{\|A^n\|}=a.\qquad(2.2.5)$$

另一方面，$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ n_0$，使得 $\sqrt[n_0]{\|A^{n_0}\|}<a+\varepsilon$. 当 $n\geqslant n_0$ 时，记 $n=kn_0+s$，$0\leqslant s<n_0$，则

$$\|A^n\| = \|A^{kn_0+s}\| \leqslant \|A^{n_0}\|^k \cdot \|A\|^s.$$

于是

$$\sqrt[n]{\|A^n\|} \leqslant \|A^{n_0}\|^{\frac{k}{n}} \cdot \|A\|^{\frac{s}{n}} < (a+\varepsilon)^{\frac{kn_0}{n}} \|A\|^{\frac{s}{n}}.$$

令 $n\to\infty$，则 $\frac{s}{n}\to 0$，$\frac{kn_0}{n}\to 1$，从而

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\|A^n\|} \leqslant a+\varepsilon.$$

由 ε 的任意性知

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\|A^n\|} \leqslant a \tag{2.2.6}$$

于是由(2.2.5)与(2.2.6)式得

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|} = a = \inf_{n\geqslant 1} \sqrt[n]{\|A^n\|}.$$

2°　对于 $\lambda\in\mathbf{C}$，$|\lambda|>a$，存在 n_0，当 $n\geqslant n_0$ 时，$\sqrt[n]{\|A^n\|}<a+\varepsilon<|\lambda|$. 令 $B=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{\lambda^{n+1}}$，则 $B\in B(\mathscr{H})$，并且

$$(\lambda I-A)B=B(\lambda I-A)=I,$$

从而 $B=(\lambda I-A)^{-1}$，$\lambda\in\rho(A)$. 此即

$$(\lambda I-A)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{\lambda^{n+1}}, \tag{2.2.7}$$

$$r(A)\leqslant\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|A^n\|}. \tag{2.2.8}$$

另一方面，由(2.2.7)式，当 $|\lambda|>a$ 并且 $f\in B(\mathscr{H})^*$ 时，

$$f((\lambda I-A)^{-1})=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(A^n)}{\lambda^{n+1}}. \tag{2.2.9}$$

于是 $f((\lambda I-A)^{-1})$ 在域 $\{\lambda;|\lambda|>a\}$ 中解析. 但又由 2°

$$\{\lambda;|\lambda|>a\}\subset\{\lambda;|\lambda|>r(A)\}\subset\rho(A).$$

根据 Laurent 展开式的唯一性，(2.2.9)即为 $f((\lambda I-A)^{-1})$ 在 $\{\lambda;|\lambda|>r(A)\}$ 上的 Laurent 展开式，并且对于 $\forall\ \varepsilon>0$，我们有

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|f(A^n)|}{(r(A)+\varepsilon)^{n+1}}<\infty.$$

记 $B_n=\frac{A^n}{(r(A)+\varepsilon)^n}$，则 $B_n\in B(\mathscr{H})$，并对于每个 $f\in B(\mathscr{H})^*$，

$\{f(B_n)\}$有界．由共鸣定理，$\|B_n\|\leqslant M<\infty\ (n=1,2,\cdots)$．所以$\|A^n\|\leqslant(r(A)+\varepsilon)^n M$，即

$$\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|A^n\|}\leqslant r(A)+\varepsilon.$$

由ε的任意性，则

$$\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|A^n\|}\leqslant r(A). \tag{2.2.10}$$

于是由(2.2.8)和(2.2.10)得

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|A^n\|}=r(A).$$ ▌

定理 2.2.7　设$\mathscr{X}$是复 Banach 空间，$\lambda,\mu\in\rho(A)$，$A\in B(\mathscr{X})$．则

(1)　$R(\lambda,A)-R(\mu,A)=(\mu-\lambda)R(\lambda,A)R(\mu,A)$；

(2)　若$B\in B(\mathscr{X})$，$AB=BA$，则$BR(\lambda,A)=R(\lambda,A)B$；

(3)　$R(\lambda,A)R(\mu,A)=R(\mu,A)R(\lambda,A)$．

定理 2.2.8（谱映射定理）　设$\mathscr{X}$是复 Banach 空间，$A\in B(\mathscr{X})$．若$p(\lambda)$是复变量λ的n次多项式，则$\sigma(p(A))=p(\sigma(A))$，其中$p(A)$是将$\lambda$换为$A$时相应的算子多项式，

$$p(\sigma(A))=\{p(\lambda);\lambda\in\sigma(A)\}.$$

证明　若$\lambda\in\sigma(A)$，不妨记$p(\lambda)=a_n\lambda^n+\cdots+a_1\lambda+a_0\ (a_n\neq 0)$，则$p(\lambda)I-p(A)=(\lambda I-A)Q(\lambda,A)$，其中$Q(\lambda,A)$是$A$的多项式，从而$Q(\lambda,A)\in B(\mathscr{X})$．假若$p(\lambda)I-p(A)$是正则算子，则

$$(\lambda I-A)Q(\lambda,A)(p(\lambda)I-p(A))^{-1}=I,$$

$$(p(\lambda)I-p(A))^{-1}(\lambda I-A)Q(\lambda,A)=I.$$

由于$(\lambda I-A)$与$Q(\lambda,A)$以及$Q(\lambda,A)$与$(p(\lambda)I-p(A))^{-1}$都可交换，所以由上式也可得出

$$(\lambda I-A)[Q(\lambda,A)(p(\lambda)I-p(A))^{-1}]$$

$$=[Q(\lambda,A)(p(\lambda)I-p(A))^{-1}](\lambda I-A)=I.$$

故λ是A的正则点，矛盾．于是$p(\lambda)\in\sigma(p(A))$或$p(\sigma(A))\subset\sigma(p(A))$．

反之，若$\mu\in p(\sigma(A))$，则

$$\mu-p(\lambda)=a_n(\lambda-\mu_1)\cdots(\lambda-\mu_n)\neq 0,\quad \lambda\in\sigma(A).$$

从而 $\lambda\neq\mu_i(i=1,2,\cdots,n)$. 即每个 $\mu_i\in\rho(A)$. 则 $\mu I-p(A)$必是正则算子. 于是 $\mu\overline{\in}\sigma(p(A))$, 即 $\sigma(p(A))\subset p(\sigma(A))$. 故

$$\sigma(p(A))=p(\sigma(A)).$$ ▌

设 $\mathscr{X}$ 为 Banach 空间, $C(\mathscr{X})$是 $\mathscr{X}$ 到 $\mathscr{X}$ 中的紧算子集. 则对于 $A\in C(\mathscr{X})$, $\lambda\in\mathbf{C}$ $(\lambda\neq 0)$, $N(\lambda I-A)$是有限维的, 并且 $R(\lambda I-A)$是 $\mathscr{X}$ 的闭线性子空间. 若 $\dim\mathscr{X}=\infty$, 则 $0\in\sigma(A)$.

定义2.2.2 设$\mathscr{X}$为线性赋范空间, $\mathscr{X}^*$是$\mathscr{X}$的共轭空间.

(1) 若 $x\in\mathscr{X}$, $x^*\in\mathscr{X}^*$, $x^*(x)=0$, 称 x^* 与 x 正交, 记为 $x\perp x^*$.

(2) 若 $M\subset\mathscr{X}$, $N\subset\mathscr{X}^*$, $\forall\ x\in M$, $x^*\in N$, $x\perp x^*$, 则称 M 与 N 正交, 记为 $M\perp N$.

定理 2.2.9 设 $\mathscr{X}$ 为 Banach 空间, $A\in C(\mathscr{X})$, $\lambda\neq 0$, A^* 是 A 的共轭算子.

(1) 若 $y\in\mathscr{X}$, 则方程$(\lambda I-A)x=y$ 可解的充分必要条件是 $y\perp N(\lambda I-A^*)$, $N(\lambda I-A)$是 A^* 的相应于 λ 的特征向量空间.

(2) 若 $y^*\in\mathscr{X}^*$, 则方程$(\lambda I-A^*)x^*=y^*$ 可解的充分必要条件是 $y^*\perp N(\lambda I-A)$, $N(\lambda I-A)$是 A 的相应于 λ 的特征向量空间.

(3) $\sigma(A)=\sigma(A^*)$.

证明 1° 必要性是显然的. 我们只需证明充分性.

若 $y\perp N(\lambda I-A^*)$, 则 $y\in R(\lambda I-A)$. 否则, $y\overline{\in}R(\lambda I-A)$, 而 $R(\lambda I-A)$是闭线性子空间, 根据 Hahn-Banach 定理, 存在 $x^*\in\mathscr{X}^*$, $x^*(y)\neq 0$, 但对于$\forall\ y'\in R(\lambda I-A)$, $x^*(y')=0$. 由此, 对于$\forall\ x\in\mathscr{X}$, $y'=(\lambda I-A)x\in R(\lambda I-A)$,

$$(x,(\lambda I-A^*)x^*)=((\lambda I-A)x,x^*)=x^*(y')=0.$$

从而$(\lambda I-A^*)x^*=0$, $x^*\in N(\lambda I-A)$. 但 $x^*(y)\neq 0$, 这与 $y\perp N(\lambda I-A)$矛盾. 由此, $y\in R(\lambda I-A)$, 所以存在 $x\in\mathscr{X}$, 使得 $y=(\lambda I-A)x$.

2° 必要性显然．现在证明充分性．

若 $y^* \perp N(\lambda I-A)$，对于 $\forall\ y\in R(\lambda I-A)$，不妨设 $y=(\lambda I-A)x$，令 $x_0^*(y)=y^*(x)$，显然 x_0^* 有确定的意义，并且在 $R(\lambda I-A)$ 上是线性的．现在证明 x_0^* 还是连续的．设 $y_n\in R(\lambda I-A)$，不妨设 $y_n=(\lambda I-A)x_n$，若 $y_n\to 0(n\to\infty)$，容易证明，存在 $r>0$，$\|(\lambda I-A)x\|\geqslant r\|x\|$，即 $\|(\lambda I-A)x_n\|\geqslant r\|x_n\|$．于是 $\{x_n\}$ 为有界序列．A 紧，不妨设 $Ax_{n_k}\to x_0$．对于 $y_{n_k}=(\lambda I-A)x_{n_k}$ 两端取极限得到，$\lambda x_{n_k}\to x_0$．由 $\lambda I-A$ 的连续性又得

$$\begin{aligned}(\lambda I-A)x_0&=\lim_{n_k\to\infty}\lambda(\lambda I-A)x_{n_k}\\&=\lim_{n_k\to\infty}\lambda y_{n_k}=0.\end{aligned}$$

于是 $x_0\in N(\lambda I-A)$，所以 $y^*(x_0)=0$，

$$x_0^*(y_{n_k})=y^*(x_{n_k})\to\frac{1}{\lambda}y^*(x_0)\quad(n_k\to\infty),$$

即 $\lim\limits_{n_k\to\infty}x_0^*(y_{n_k})=0$．这说明，对于任一序列 $\{y_n\}$，都可选出子序列 $\{y_{n_k}\}$，$x_0^*(y_{n_k})\to 0$，故必有 $x_0^*(y_n)\to 0(n\to\infty)$，$x_0^*$ 连续．

根据 Hahn-Banach 定理，存在 $x^*\in\mathscr{X}^*$，在 $R(\lambda I-A)$ 上，$x^*(y)=x_0^*(y)$，现在对于 $\forall\ x\in\mathscr{X}$，

$$\begin{aligned}(x,(\lambda I-A^*)x^*)&=((\lambda I-A)x,x^*)\\&=((\lambda I-A)x,x_0^*)\\&=x_0^*(y)=y^*(x)=(x,y^*).\end{aligned}$$

故 $(\lambda I-A^*)^*=y^*$，x^* 是方程的解．

3° 由于 A 紧，则 A^* 亦紧，从而当 $\lambda\neq 0$ 时，λ 不是 A^* 的特征值，λ 一定是正则点．若 $\dim\mathscr{X}<\infty$，相应于 A^* 的矩阵是相应于 A 的矩阵的转置，故结论成立．若 $\dim\mathscr{X}=\infty$，则 $0\in\sigma(A)$．否则，若 $0\overline{\in}\sigma(A)$，$0\in\rho(A)$，从而 $0I-A=-A$ 是正则算子．A^{-1} 有界，A 紧，故 $I=AA^{-1}$ 是紧算子，这说明 $\mathscr{X}$ 的闭单位球是紧的，从而 $\mathscr{X}$ 是有限维空间，与所谈条件矛盾．显然 $\dim\mathscr{X}^*=\infty$，于是 $0\in\sigma(A^*)$．现在设 $\lambda\neq 0$，我们只须证明 $\lambda\in\rho(A)$ 当且仅当 $\lambda\in$

$\rho(A^*)$.

若 $\lambda\in\rho(A)$，由于 $\lambda\in\rho(A)$ 当且仅当对于任何 $a\in\mathscr{H}$，$(\lambda I-A)x=a$ 存在唯一的解，从(1)知 $a\perp N(\lambda I-A^*)$. 由 a 的任意性知 $N(\lambda I-A^*)=\{0\}$，即 $\lambda I-A^*$ 是一一映射，并且是到上的，从而 $\lambda\in\rho(A^*)$.

反之，若 $\lambda\in\rho(A^*)$，则 $\lambda I-A$ 是一一的，也是到上的. 故 $\lambda\in\rho(A)$. 总之，$\rho(A)=\rho(A^*)$. ∎

定理 2.2.10 设 H 为复 Hilbert 空间，$A\in B(H)$，则

(1) $\rho(A^*)=\{\bar{\lambda};\lambda\in\rho(A)\}$.

(2) $\sigma(A^*)=\{\bar{\lambda};\lambda\in\sigma(A)\}$.

证明 只须证明(1)即可. 若 $\lambda\in\rho(A)$，$\lambda I-A$ 为正则算子，此时 $(\lambda I-A)^*=\bar{\lambda}I-A^*$ 是正则算子，故 $\bar{\lambda}\in\rho(A^*)$，从而 $\{\bar{\lambda};\lambda\in\rho(A)\}\subset\rho(A^*)$，但 $(A^*)^*=A$，于是 $\{\bar{\lambda};\lambda\in\rho(A^*)\}\subset\rho(A^{**})=\rho(A)$，两端取复共轭得到 $\rho(A^*)\subset\{\bar{\lambda};\lambda\in\rho(A)\}$，从而(1)得证. ∎

Hille 推广了预解式概念为伪预解式概念. 设 $\mathscr{X}$ 是局部凸线性拓扑空间，仍设 $B(\mathscr{X})$ 是映射 $\mathscr{X}$ 到 $\mathscr{X}$ 内的一切连续线性算子的全体. 若定义乘积运算为算子的复合，则 $B(\mathscr{X})$ 是一个代数. 伪预解式 J_λ 是定义于复 λ-平面的子集 $D(J)$ 而取值于 $B(\mathscr{X})$ 的算子值函数并且满足预解方程：

$$J_\lambda-J_\mu=(\mu-\lambda)J_\lambda J_\mu,\ \lambda,\mu\in D(J). \tag{2.2.11}$$

命题 2.2.1 一切 $J_\lambda(\lambda\in D(J))$ 有公共零空间 $N(J)$ 和值域 $R(J)$. 类似地，一切 $(I-\lambda J_\lambda)(\lambda\in D(J))$ 有公共零空间 $N(I-J)$ 和值域 $R(I-J)$. 此外，伪预解式 J_λ 具有交换性：

$$J_\lambda J_\mu=J_\mu J_\lambda,\ \lambda,\mu\in D(J). \tag{2.2.12}$$

证明 在(2.2.11)式中交换 λ 及 μ，则有

$$J_\mu-J_\lambda=(\lambda-\mu)J_\mu J_\lambda=-(\mu-\lambda)J_\mu J_\lambda.$$

将上式与(2.2.11)式相加得出

$$(\mu-\lambda)(J_\lambda J_\mu-J_\mu J_\lambda)=0.$$

因此,(2.2.12)式成立.

利用(2.2.11)和(2.2.12)式可证命题的第一部分成立. 实际上,设 $J_\mu x=0$,则

$$J_\lambda x-(\mu-\lambda)J_\mu J_\lambda x=0,$$

即

$$J_\lambda(Ix-(\mu-\lambda)J_\mu x)=0.$$

从而 $J_\mu x=0$ 意味着 $J_\lambda Ix=0$,即 $J_\lambda x=0$. 所以 $J_\lambda(\lambda\in D(J))$ 有公共的零空间 $N(J)$. 由 $J_\mu x-J_\lambda x=(\lambda-\mu)J_\mu J_\lambda x$,即

$$J_\mu(Ix-(\lambda-\mu)J_\lambda x)=J_\lambda x,$$

显然可知 $J_\lambda(\lambda\in D(J))$ 有公共的值域.

现在证明命题的第二部分. 由于

$$(I-\lambda J_\lambda)(I-\mu J_\mu)=I-\mu J_\lambda-\lambda J_\lambda+\lambda\mu J_\lambda J_\mu,$$

$$(I-\mu J_\mu)(I-\lambda J_\lambda)=I-\lambda J_\lambda-\mu J_\mu+\mu\lambda J_\mu J_\lambda,$$

并且 $\lambda\mu=\mu\lambda$, $J_\lambda J_\mu=J_\mu J_\lambda$,故得

$$(I-\lambda J_\lambda)(I-\mu J_\mu)=(I-\mu J_\mu)(I-\lambda J_\lambda).$$

而

$$J_\lambda J_\mu=J_\mu J_\lambda=\frac{J_\lambda-J_\mu}{\mu-\lambda},$$

则

$$(I-\lambda J_\lambda)(I-\mu J_\mu)=I-\mu J_\mu-\lambda J_\lambda+\frac{\lambda\mu}{\mu-\lambda}(J_\lambda-J_\mu),$$

$$(I-\lambda J_\lambda)-(I-\mu J_\mu)=(I-\lambda J_\lambda)(I-\mu J_\mu)-I-\frac{\lambda\mu}{\mu-\lambda}(J_\lambda-J_\mu).$$

但

$$-I-\frac{\lambda\mu}{\mu-\lambda}(J_\lambda-J_\mu)=-\frac{\lambda}{\mu-\lambda}(I-\mu J_\mu)+\frac{\mu}{\mu-\lambda}(I-\lambda J_\lambda).$$

故有

$$\left(1-\frac{\mu}{\mu-\lambda}\right)(I-\lambda J_\lambda)-\left(1-\frac{\lambda}{\mu-\lambda}\right)(I-\mu J_\mu)$$
$$=(I-\lambda J_\lambda)(I-\mu J_\mu)=(I-\mu J_\mu)(I-\lambda J_\lambda).$$

于是，若$(I-\lambda J_\lambda)x=0$，则必$(I-\mu J_\mu)x=0$；反之亦然．因此，$I-\lambda J_\lambda(\lambda\in D(J))$有公共的零空间$N(I-J)$．

令$r=1-\frac{\lambda}{\mu-\lambda}$，$\delta=1-\frac{\mu}{\mu-\lambda}$，则有

$$
\begin{aligned}
& r(I-\lambda J_\lambda)-\delta(I-\mu J_\mu) \\
&\quad =(I-\mu J_\mu)(I-\lambda J_\lambda)=(I-\lambda J_\lambda)(I-\mu J_\mu).
\end{aligned}
$$

由此当$\lambda,\mu\in D(J)$时，必有

$$(I-\lambda J_\lambda)[\delta^{-1}rI-\delta^{-1}(I-\mu J_\mu)](x)=(I-\mu J_\mu)x.$$

于是$I-\lambda J_\lambda$与$I-\mu J_\mu$有公共的值域$R(I-J)$．综上所述，命题2.2.1得证． ▌

定理 2.2.11　伪预解式J_λ是一个线性算子A的预解式$(\lambda I-A)^{-1}$当且仅当$N(J)=\{0\}$；因而$R(J)$与A的定义域$D(A)$重合．

证明　"必要性"是明显的．事实上，设$J_\lambda=(\lambda I-A)^{-1}$．由于$x\in N(J)$，则可推得$J_\lambda x=0$．于是

$$x=Ix=(\lambda I-A)J_\lambda x=(\lambda I-A)0=0.$$

故得$N(J)=\{0\}$．

现在证明"充分性"．设$N(J)=\{0\}$．欲证存在一线性算子A使得$J_\lambda=(\lambda I-A)^{-1}$．在此假设条件下，对于$\forall\ \lambda\in D(J)$，逆$J_\lambda^{-1}$存在．于是我们有等式

$$\lambda I-J_\lambda^{-1}=\mu I-J_\mu^{-1}. \tag{2.2.13}$$

事实上，由(2.2.11)与(2.2.12)式有

$$
\begin{aligned}
& J_\lambda J_\mu(\lambda I-J_\lambda^{-1}-\mu I+J_\mu^{-1}) \\
&\quad =(\lambda-\mu)J_\lambda J_\mu-J_\lambda J_\mu(J_\lambda^{-1}-J_\mu^{-1}) \\
&\quad =(\lambda-\mu)J_\lambda J_\mu-(J_\mu-J_\lambda)=0.
\end{aligned}
$$

从而得(2.2.13)式．我们令

$$A=\lambda I-J_\lambda^{-1}.$$

则对于$\forall\ \lambda\in D(J)$有等式

$$J_\lambda=(\lambda I-A)^{-1}$$

成立．故定理 2.2.11 获证． ▌

§2.3

Dunford 积分公式

设 $\mathscr{X}$ 是 Banach 空间，$B(\mathscr{X})$是映射 $\mathscr{X}$ 到 $\mathscr{X}$ 内的一切连续线性算子全体构成的 Banach 代数．T 是 $B(\mathscr{X})$中的有界线性算子．我们要用 Cauchy 型积分

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} f(\lambda)R(\lambda;T)d\lambda$$

来定义一个算子 $f(T)$，其中 $f(z)$为复值函数．

为此我们用 $\mathscr{F}$ 表示其解析区域包含算子 T 的谱 $\sigma(T)$的复值函数全体，其中 $T\in B(\mathscr{X})$．也就是说，对于任何 $f\in\mathscr{F}$，存在复平面 **C** 上的一个开邻域 U 包含 $\sigma(T)$使得 f 在 U 内解析．设开集 U 包含 $\sigma(T)$并且是 $f(\lambda)$的解析域的子集．假设 U 的边界 ∂U 是由有限个正定向可求长 Jordan 曲线组成，则有界线性算子 $f(T)$将定义为

$$f(T)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U} f(\lambda)R(\lambda;T)d\lambda,$$

其中右边的积分称之为 Dunford 积分．

为了简化我们的叙述，我们将用一个直接方法来得出含有有界线性算子的解析函数对复变量 z 的线积分．设 $T_i(i=1,2,\cdots)$ 是 $\mathscr{X}$ 到 $\mathscr{X}$ 内的有界线性算子，其中 $\mathscr{X}$ 为 Banach 空间．

设 $\psi_i(z)(i=1,2,\cdots)$是沿复平面上正定向的可求长的简单连续曲线(或有限多个这样的曲线之并)$\mathscr{K}$ 上的连续复值函数．我们定义

1° $\int_{\mathscr{K}}(\psi_i(z)T_i)dz=\left(\int_{\mathscr{K}}\psi_i(z)dz\right)T_i$;

2° $\int_{\mathscr{K}}\left(\sum_{i=1}^{N}\psi_i(z)T_i\right)dz=\sum_{i=1}^{N}\left(\int_{\mathscr{K}}\psi_i(z)dz\right)T_i$；

3° 当 $\sum_{i=1}^{\infty}\psi_i(z)T_i$ 及 $\sum_{i=1}^{\infty}\left(\int_{\mathscr{K}}\psi_i(z)dz\right)T_i$ 都为强收敛时，有

$$\int_{\mathscr{K}}\left(\sum_{i=1}^{\infty}\psi_i(z)T_i\right)dz=\sum_{i=1}^{\infty}\left(\int_{\mathscr{K}}\psi_i(z)dz\right)T_i.$$

这样我们可以省却许多平行推理．

设 $T\in B(\mathscr{H})$．由 §2.2 中的讨论可得

$$\lim_{n\to\infty}\|T^n\|^{\frac{1}{n}}=r_\sigma(T)=\sup_{\lambda\in\sigma(T)}|\lambda|\leqslant\|T\|,$$

其中 $\sigma(T)$ 为 T 的谱，$r_\sigma(T)$ 为 T 的谱半径．

对于 $|\lambda|>r_\sigma(T)$ 时，特别取 $\epsilon>0$，而 $|\lambda|\geqslant r_\sigma(T)+\epsilon$ 时，由定理 2.2.6 知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{-n}T^{n-1}$ 为收敛的（强收敛）并且等于 T 的预解式 $R(\lambda;T)$．设 $f(z)$ 为在圆域 $|z|<r_\sigma(T)+\delta(\delta>0)$ 内解析的复值函数，则此函数的 Taylor 展开式

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n$$

的收敛半径 r_f 必不小于 $r_\sigma(T)+\delta$．任取 $\epsilon>0$，使得 $\epsilon<\delta$，则

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=r_\sigma(T)+\epsilon}\frac{f(\lambda)}{\lambda^{n+1}}d\lambda,$$

$$\left|\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right|\leqslant M_{r_\sigma(T)+\epsilon}(f)\cdot\frac{1}{(r_\sigma(T)+\epsilon)^n},$$

其中 $M_{r_\sigma(T)+\epsilon}(f)=\max\limits_{|\lambda|=r_\sigma(T)+\epsilon}|f(\lambda)|$．当 $n>N\left(\frac{\epsilon}{2}\right)$ 时，$\|T^n\|\leqslant\left(r_\sigma(T)+\frac{\epsilon}{2}\right)^n$，于是

$$\left\|\sum_{n>N\left(\frac{\epsilon}{2}\right)}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}T^n\right\|$$

$$\leqslant M_{r_\sigma(T)+\epsilon}(f)\cdot\sum_{n>N\left(\frac{\epsilon}{2}\right)}\left(\frac{r_\sigma(T)+\frac{\epsilon}{2}}{r_\sigma(T)+\epsilon}\right)^n.$$

此不等式右端当 n 充分大时可以任意小．故

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}T^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=r_\sigma(T)+\varepsilon}\frac{f(\lambda)}{\lambda^{n+1}}d\lambda\right\}T^n$$

为强收敛的．另外，当 $|\lambda|\geqslant r_\sigma(T)+\varepsilon$ 时，亦为强收敛的．故依定义

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=r_\sigma(T)+\varepsilon}f(\lambda)R(\lambda;T)d\lambda\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=r_\sigma(T)+\varepsilon}\frac{f(\lambda)}{\lambda^{n+1}}\right\}T^n\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}T^n=f(T).\end{aligned}$$

由此我们得到 Dunford 积分公式：

$$f(T)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=r_\sigma(T)+\varepsilon}f(\lambda)R(\lambda;T)d\lambda,\qquad(2.3.1)$$

其中 $R(\lambda;T)=(\lambda I-T)^{-1}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda^{-n}T^{n-1}$ 为 T 的预解式．

在以后的讨论中我们常常需要下面几个 Dunford 积分的性质．

定理 2.3.1 设 $\{f_n(z)\}_{n\geqslant1}$ 为 $|z|<r_\sigma(T)+\delta$ 内的内闭一致收敛的解析函数序列并且以解析函数 $f(z)(|z|<r_\sigma(T)+\delta)$ 为其极限．则 $\{f_n(T)\}_{n\geqslant1}$ 强收敛于其极限 $f(T)$.

证明 由假设条件，对于任给的 $\varepsilon_1>0$，必有 $N(\varepsilon_1)>0$，使得对于 $z\in\{z;|z|=r_\sigma(T)+\varepsilon,\varepsilon<\delta\}$，当 $n>N(\varepsilon_1)$ 时，我们有

$$|f(z)-f_n(z)|<\varepsilon_1.$$

从而，当 $n>N(\varepsilon_1)$ 时，

$$\begin{aligned}&\|f(T)-f_n(T)\|\\&=\left\|\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=r_\sigma+\varepsilon}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(f(\lambda)-f_n(\lambda))\lambda^{-k}d\lambda\right)T^{k-1}\right\|\\&\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{|\lambda|=r_\sigma+\varepsilon}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|f(\lambda)-f_n(\lambda)|\cdot|\lambda|^{-k}d\lambda\right)\|T^{k-1}\|\end{aligned}$$

$$\leqslant\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\varepsilon_1}{r_\sigma+\varepsilon}\cdot 2\pi\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{r_\sigma+\frac{\varepsilon}{2}}{r_\sigma+\varepsilon}\right)^{k-1},(r_\sigma=r_\sigma(T)),$$

即当 n 充分大时，上不等式右端可以任意小．故 $\{f_n(T)\}$ 强收敛于 $f(T)$． ∎

设 $\mathscr{F}(T)$ 表示区域 $\{z;|z|<r_\sigma(T)+\delta,\forall\ \delta>0\}$ 内的解析函数 $f(z)$ 所对应的算子 $f(T)$（即(2.3.1)式定义的算子）所组成的集合，其中 T 是 Banach 空间 $\mathscr{X}$ 到自身内的有界线性算子并且 T 的谱半径为 $r_\sigma(T)$．

定理 2.3.2 设 $f(T),g(T)\in\mathscr{F}(T)$ 并且 α,β 为复常数，则

(1) $\alpha f(T)+\beta g(T)\in\mathscr{F}(T)$．

(2) $f(T)g(T)\in\mathscr{F}(T)$．

证明 (1)式显然成立．现在证明(2)．

设 $h(\lambda)=f(\lambda)g(\lambda)$，则存在 $\delta>0$，h 在区域 $\{z;|z|<r_\sigma(T)+\delta\}$ 内解析，$h(T)\in\mathscr{F}(T)$．现在只须证明 $h(T)=f(T)g(T)$ 即可．假设

$$\Gamma_1=\{z;|z|=r_\sigma(T)+\delta',0<\delta'<\delta\}$$
$$\Gamma_2=\{z;|z|=r_\sigma(T)+\delta'',0<\delta''<\delta'<\delta\}.$$

由于 $\lambda\neq\mu$，

$$\begin{aligned}
&R(\lambda;T)-R(\mu;T)\\
&\quad=(\lambda I-T)^{-1}-(\mu I-T)^{-1}\\
&\quad=(\lambda I-T)^{-1}(\mu I-T)(\mu I-T)^{-1}\\
&\qquad-(\lambda I-T)^{-1}(\lambda I-T)(\mu I-T)^{-1}\\
&\quad=(\lambda I-T)^{-1}((\mu I-T)-(\lambda I-T))(\mu I-T)^{-1}\\
&\quad=(\mu-\lambda)R(\lambda;T)R(\mu;T),
\end{aligned}$$

即

$$R(\lambda;T)R(\mu;T)=(\mu-\lambda)^{-1}(R(\lambda;T)-R(\lambda;T)).$$

因此

$$f(T)g(T)=\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2\int_{\Gamma_1}\int_{\Gamma_2}f(\lambda)g(\mu)R(\lambda;T)R(\mu;T)d\mu d\lambda$$

$$=\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2\int_{\Gamma_1}\int_{\Gamma_2} f(\lambda)g(\mu)\frac{R(\lambda;T)-R(\mu;T)}{\mu-\lambda}d\mu d\lambda$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2} f(\lambda)R(\lambda;T)\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{g(\mu)}{\mu-\lambda}d\mu\right)d\lambda$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} g(\mu)R(\mu;T)\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{f(\lambda)}{\mu-\lambda}d\lambda\right)d\mu.$$

因为 $\lambda\in\Gamma_2$ 在 Γ_1 的内部，$\mu\in\Gamma_1$ 在 Γ_2 的外部，所以上式右端圆括号中的积分分别等于 $g(\lambda)$ 和 0. 因此

$$f(T)g(T)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2} f(\lambda)g(\lambda)R(\lambda;T)d\lambda=h(T).$$ ▌

定理 2.3.3（谱映射定理） 若 $f(T)\in\mathscr{F}(T)$，则

$$f(\sigma(T))=\sigma(f(T)).$$

证明 设 $\lambda\in\sigma(T)$，并定义

$$g(\mu)=\frac{f(\lambda)-f(\mu)}{\lambda-\mu}.$$

考虑

$$f(T)=(2\pi i)^{-1}\int_{|\lambda|=r_\sigma(T)+\delta} f(\lambda)R(\lambda;T)d\lambda \tag{2.3.2}$$

$$g(T)=(2\pi i)^{-1}\int_{|\mu|=r_\sigma(T)+\delta} g(\mu)R(\mu;T)d\mu \tag{2.3.3}$$

$$I=(2\pi i)^{-1}\int_{|\mu|=r_\sigma(T)+\delta} 1\cdot R(\mu;T)d\mu,$$

从而

$$f(\lambda)I=(2\pi i)^{-1}\int_{|\mu|=r_\sigma(T)+\delta} 1\cdot f(\lambda)R(\mu;T)d\mu. \tag{2.3.4}$$

因此，由(2.3.2)，(2.3.3)和(2.3.4)式，

$$\begin{aligned} &f(\lambda)I-f(T)\\ &=(2\pi i)^{-1}\int_{|\mu|=r_\sigma(T)+\delta}(f(\lambda)-f(\mu))R(\mu;T)d\mu\\ &=(2\pi i)^{-1}\int_{|\mu|=r_\sigma(T)+\delta}(\lambda-\mu)g(\mu)R(\mu;T)d\mu\\ &=(\lambda I-T)g(T). \end{aligned} \tag{2.3.5}$$

由是，若 $f(\lambda)I-f(T)$ 有有界逆 $(f(\lambda)I-f(T))^{-1}=B$，则由

(2.3.5)式，$g(T)B$ 为$(\lambda I-T)$的有界逆．故由 $\lambda\in\sigma(T)$ 必可导出 $f(\lambda)\in\sigma(f(T))$．另一方面，设 $\lambda\in\sigma(f(T))$．假设 $\lambda\overline{\in}f(\sigma(T))$，则函数

$$g(\mu)=(f(\mu)-\lambda)^{-1}\in\mathscr{F},$$

从而

$$g(T)\in\mathscr{F}(T)\text{ 且 }g(\mu)(f(\mu)-\lambda)=1.$$

则对应地有

$$g(T)(f(T)-\lambda I)=I.$$

这与假设 $\lambda\in\sigma(f(T))$矛盾．故当 $\lambda\in\sigma(f(T))$时必有 $\lambda\in f(\sigma(T))$．总之，$f(\sigma(T))=\sigma(f(T))$．▌

§2.4

对应于整式序列极限函数的算子

定义 2.4.1　设 H 为 Hilbert 空间，A 为 H 中的线性算子．若对于任给 $x\in H$，均有$(Ax,x)\geqslant 0$，则称算子 A 为正算子，记为 $A\geqslant 0$；若$(Ax,x)\leqslant 0$，则称算子 A 为负算子，记为 $A\leqslant 0$；$-A$ 表示$(-1)A$ 且$(-Ax,x)=-1\cdot(Ax,x)=-(Ax,x)$．

由定义可得下面的关系：

(1)　$A\geqslant 0\Leftrightarrow -A\leqslant 0$.

(2)　$(Ax,x)\geqslant 0(\forall\ x\in H)\Leftrightarrow -1\cdot(Ax,x)\leqslant 0$
　　$\Leftrightarrow(-Ax,x)\leqslant 0\Leftrightarrow -A\leqslant 0$.

利用正负算子的符号表示可以考虑 Hilbert 空间 H 中的算子不等式．如果两个算子 A，B 的差 $A-B$ 为正算子，即 $A-B\geqslant 0$，我们就称算子 A 大于或等于算子 B，记为 $A\geqslant B$．于是

(3)　$A-B\geqslant 0\Leftrightarrow A\geqslant B\Leftrightarrow -1\cdot(A-B)\leqslant 0$
　　$\Leftrightarrow B-A\leqslant 0\Leftrightarrow B\leqslant A$.

(4)　$A\geqslant B$ 且 $A\leqslant B\Leftrightarrow A-B\geqslant 0$ 且 $A-B\leqslant 0$

$$\Leftrightarrow A=B.$$

出此我们就对任何 Hilbert 空间 H 中的全体线性算子构成的集合，给出了次序的概念，而将此集合看作半序集合. 从而 Zorn 引理在这个集合可以施用.

命题 2.4.1　设$\{A_n\}$为 Hilbert 空间 H 中的正算子序列.

(1)　若 $A_n\to A$ $(n\to\infty)$，则 A 为正算子.

(2)　若 A,B 均为正算子，则 $A+B$ 以及 A^* 均为正算子.

证明　1°　从$(A_nx,x)\geqslant 0$ 求极限得出$(Ax,x)\geqslant 0$. 故 A 为正算子，即(1)得证.

2°　设 A,B 为正算子，则

$$(Ax,x)=(x,A^*x)\geqslant 0 \quad (\forall\ x\in H),$$

从而

$$(A^*x,x)=\overline{(x,A^*x)}\geqslant 0.$$

故 $A^*\geqslant 0$. 再由

$$((A+B)x,x)=(Ax,x)+(Bx,x)\geqslant 0 \quad (\forall\ x\in H)$$

推得 $A+B\geqslant 0$. 因此(2)得证. ∎

设 A 为 H 中的有界 Hermite 线性算子. 则对于任何正整数 n，A 的幂 A^n 亦为有界 Hermite 线性算子.

事实上，$A^n=A^{n-1}A$. 设 A^{n-1}为 Hermite 线性算子，而 A^{n-1} 为 Hermite 的充要条件是 $A^{n-1}A=AA^{n-1}$. 而由算子的乘法的结合律有 $A^{n-1}A=A(A^{n-2}A)=AA^{n-1}$. 故由归纳法知，$A^n$ 亦为 Hermite 算子. A^n 的有界性是明显的.

以实数 $c_i(i=0,1,\cdots,n)$为系数的多项式 $P(t)=\sum\limits_{i=0}^{n}c_it^i$ 相应于 H 内有界 Hermite 线性算子 A 的算子多项式 $P(A)=\sum\limits_{i=0}^{n}c_iA^i$ 亦为 H 内有界线性算子而且是 Hermite 算子. $P(A)$命名为对应于 $P(t)$的有界 Hermite 线性算子. 我们知道实系数多项式 $P(t)$，$Q(t)$ 相应的算子分别表示为 $P(A)$,$Q(A)$，则 $aP(t)+bQ(t)$，

$P(t)Q(t)$ 相应的算子分别就是 $aP(A)+bQ(A)$，$P(A)Q(A)$，但当 a,b 为实数时，它们随 A 为 Hermite 有界线性算子，而亦为 Hermite 有界线性算子.

定理 2.4.1　设 A 为 Hilbert 空间 H 内的 Hermite 有界线性算子. 如果 (Ax,x) 在 $\|x\|=1$ 上的上确界及下确界分别为 M，m，则在 $m\leqslant t\leqslant M$ 上取非负值的多项式 $P(t)$ 所对应的算子 $P(A)$ 为正算子，即 $P(A)\geqslant 0$.

证明　要证 $P(A)\geqslant 0$，即证对任意的 $x\in H$，$(P(A)x,x)\geqslant 0$. 如果在 $m\leqslant t\leqslant M$ 时 $P(t)>0$ 的情况，可以证明 $P(A)$ 为正算子，即 $(P(A)x,x)\geqslant 0$，$\forall\ x\in H$，则对于 $P(t)\geqslant 0$ 时，任取 $\varepsilon>0$，令 $Q(t)=P(t)+\varepsilon$，使其 $Q(t)>0$，于是 $(Q(A)x,x)=(P(A)x,x)+\varepsilon(x,x)\geqslant 0$. 令 $\varepsilon\to 0$，则得 $(P(A)x,x)\geqslant 0$. 所以，我们兹就 $P(t)>0$，$m\leqslant t\leqslant M$ 来证明 $(P(A)x,x)\geqslant 0$.

设 $P(t)$ 的次数 $p\leqslant r$. 有恒等式：

$$c_k t^k=\frac{c_k}{(M-m)^r}[M(t-m)+m(M-t)]^k\cdot[(t-m)+(M-t)]^{r-k}.$$

而

$$P(t)=\sum_{k=0}^{p}c_k t^k=\sum_{s=0}^{r}a_s(t-m)^s(M-t)^{r-s},$$

并且当 r 充分大时，必有 $a_s>0$ $(s=0,1,2,\cdots,r)$. 这一问题乃是 Hausdorff 的力矩问题. 事实上，当 $P(t)$ 为一次式的情况：

$$P(t)=a_0(M-t)+a_1(t-m)>0,$$

$$a_0=\frac{P(m)}{M-m}>0,\quad a_1=\frac{P(M)}{M-m}>0.$$

当 $P(t)$ 为取正值的二次式的情形，即

$$a+2b(t-m)+c(t-m)^2,$$

其中 $a,c>0$，$ac-b^2>0$，否则上式可分解为一次式形式. 当 $P(t)$ 为 $p(\geqslant 2)$ 次式的情况，利用

$$\sum_{k=0}^{p}c_p^k(t-m)^k(M-t)^{p-k}$$

$$=[(t-m)+(M-t)]^p=(M-m)^p,$$

$$\sum_{k=1}^{p} c_{p-1}^{k-1}(t-m)^{k-1}(M-t)^{p-k}$$
$$=[(t-m)+(M-t)]^{p-1}=(M-m)^{p-1},$$

$$\sum_{k=2}^{p} c_{p-2}^{k-2}(t-m)^{k-2}(M-t)^{p-k}$$
$$=[(t-m)+(M-t)]^{p-2}=(M-m)^{p-2},$$

则

$$P(t)=a\sum_{k=0}^{p} c_p^k(t-m)^k(M-t)^{p-k}/(M-m)^p$$
$$+2b(t-m)\sum_{k=1}^{p} c_{p-1}^{k-1}(t-m)^{k-1}(M-t)^{p-k}/(M-m)^{p-1}$$
$$+c(t-m)^2\sum_{k=2}^{p} c_{p-2}^{k-2}(t-m)^{k-2}(M-t)^{p-k}/(M-m)^{p-2}$$
$$=\sum_{k=0}^{p}\frac{(p-2)!}{k!\ (p-k)!}(t-m)^k(M-t)^{p-k}$$
$$\left\{\frac{p(p-1)a}{(M-m)^p}+\frac{2k(p-1)b}{(M-m)^{p-1}}+\frac{k(k-1)c}{(M-m)^{p-2}}\right\}.$$

然而

$$p(p-1)a+2k(p-1)(M-m)b+k(k-1)(M-m)^2c>0,$$

其中 $k=0,1,2,\cdots,p$. 则当 p 充分大时, k 的二次式的判别式

$$[2(p-1)(M-m)b-(M-m)^2c]^2-4p(p-1)(M-m)^2ac\leqslant 0.$$

当 $P(t)$ 为三次式时, $P(t)$ 可化为一次式与二次式的积; 当 $P(t)$ 为四次式时, $P(t)$ 可化为两个二次式的积, 并且两者在 $P_4(t)>0$ 时可同时取正号; 依次类推, 直至次数充分大时.

r 充分大时, 不妨设 r 为奇数, 则 $P(t)$ 对应的算子为

$$P(A)=\sum_{s=0}^{r} a_s(A-mI)^s(MI-A)^{r-s}\quad (a_s>0).$$

若 s 为偶数, 则 $r-s$ 为奇数. 令

$$A_1=(A-mI)^{s/2}(MI-A)^{(r-s-1)/2},$$
$$A_2=MI-A.$$

则

$$A_1^2A_2=(A-mI)^s(MI-A)^{r-s}$$

并且 A_1,A_2 与 A 可交换．若任取 $y\in H$ 且 $\|y\|=1$，则有

$$(A_2y,y)=(My-Ay,y)=M(y,y)-(Ay,y)\geqslant M-M=0.$$

从而，任取 $x\in H$ 且 $x\neq 0$，令 $y=\dfrac{x}{\|x\|}$，即 $\|y\|=1$. 所以$(A_2y,y)\geqslant 0$. 因此，$(A_2x,x)\geqslant 0$，即 A_2 为正算子．又由

$$A_1A_2=A_2A_1,A_1^*=A_1,$$

则任取 $x\in H$，我们有

$$\begin{aligned}(A_1^2A_2x,x)&=(A_1(A_1A_2)x,x)\\&=(A_1A_2x,A_1x)=(A_2A_1x,A_1x)\geqslant 0.\end{aligned}$$

故 $A_1^2A_2$ 为正算子，并且由于 $a_s>0$. 所以 $a_sA_1^2A_2$ 为正算子．

同理可证 s 为奇数时，$a_sA_1^2A_2$ 为正算子．故对任意正整数都有 $a_sA_1^2A_2$ 为正算子．从而 $P(t)$ 对应的算子 $P(A)$ 为正算子．由此定理得证． ▌

设实系数多项式 $P_n(t)(n=1,2,\cdots)$ 在 $m\leqslant t\leqslant M$ 上为不减的，即

$$P_1(t)\leqslant P_2(t)\leqslant\cdots\leqslant P_n(t)\leqslant\cdots.$$

且具有公共的上界 K. 则此多项式序列收敛于一极限函数 $F(t)$ $(m\leqslant t\leqslant M)$，并且 $F(t)$ 在 $m\leqslant t\leqslant M$ 上有界．不妨设在 $m\leqslant t\leqslant M$ 上 $P_n(t)\geqslant 0$. 否则可以 $\{P_n-P_1\}$ 替代 $\{P_n(t)\}$. 则

$$\begin{aligned}&P_1^2(t)\leqslant P_2^2(t)\leqslant\cdots\leqslant K^2,\\&P_{n+1}^2(t)-P_n^2(t)\geqslant 0,\\&K^2-P_n^2(t)\geqslant 0.\end{aligned}$$

于是，由定理 2.4.1，可知 $P_{n+1}^2(A)-P_n^2(A)$ 以及 $K^2I-P_n^2(A)$ 均为正算子．因而

$$\begin{aligned}0&\leqslant(P_n^2(A)x,x)\leqslant(P_{n+1}^2(A)x,x)\\&\leqslant(K^2Ix,x)=K^2(x,x).\end{aligned}$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}(P_n^2(A)x,x)$ 存在．取 $k>n$，则

$$P_n^2(t)\leqslant P_n(t)P_k(t)\leqslant P_k^2(t).$$

因之而有

$$(P_n^2(A)x,x)\leqslant(P_n(t)P_k(t)x,x)\leqslant(P_k^2(A)x,x).$$

令 $n\to+\infty$，上不等式左右两端收敛于同一极限．于是

$$\begin{aligned}&((P_n(A)-P_k(A))^2x,x)\\&=((P_n^2(A)+P_k^2(A)-2P_n(A)P_k(A))x,x)\to 0\quad(n\to+\infty).\end{aligned}$$

从而，由 $(P_n(A)-P_k(A))^2$ 为 Hermite 算子，则我们有

$$\begin{aligned}&((P_n^2(A)-P_k^2(A))^2x,x)\\&=((P_n(A)-P_k(A))x,(P_n(A)-P_k(A))x)\\&=\|P_n(A)x-P_k(A)x\|^2\to 0\quad(n,k\to+\infty).\end{aligned}$$

故 $P_n(A)$ 收敛于一极限算子 $F(A)$，即 $P_n(t)$ 的极限函数 $F(t)$ 对应的算子 $F(A)$．并且 $F(A)$ 是唯一的．事实上，设

$$P_1(t)\leqslant P_2(t)\leqslant\cdots\leqslant P_n(t)\leqslant\cdots,P_n(t)\to F(t),$$

$$Q_1(t)\leqslant Q_2(t)\leqslant\cdots\leqslant Q_n(t)\leqslant\cdots,Q_n(t)\to F(t).$$

假设 $P_n(A),Q_n(A)$ 分别收敛于算子 $F(A)$ 和 $G(A)$．固定 p，则 q 充分大时有

$$P_p(t)-\frac{1}{p}\leqslant Q_q(t),Q_p(t)-\frac{1}{p}\leqslant P_q(t).$$

从而

$$(P_p(A)x,x)-\frac{1}{p}(x,x)\leqslant(Q_q(A)x,x),$$

$$(Q_p(A)x,x)-\frac{1}{p}(x,x)\leqslant(P_q(A)x,x).$$

因此，若 $P_n(A)\to F(A),Q_n(A)\to G(A)$，则

$$(F(A)x,x)\leqslant(G(A)x,x)\leqslant(F(A)x,x).$$

由是，对任意 $x\in H$，

$$(F(A)x,x)=(G(A)x,x).$$

故 $F(A)=G(A)$．

定理 2.4.2　设在 $m\leqslant t\leqslant M$ 上有

$$P_1(t)\leqslant P_2(t)\leqslant\cdots\leqslant P_n(t)\leqslant\cdots,\quad P_n(t)\to F(t)(n\to+\infty),$$
$$Q_1(t)\leqslant Q_2(t)\leqslant\cdots\leqslant Q_n(t)\leqslant\cdots,\quad Q_n(t)\to G(t)(n\to+\infty).$$
若$G(t)\geqslant F(t)$，则$G(A)-F(A)$为正算子，即$G(A)\geqslant F(A)$.

证明 任给$\varepsilon>0$，当q充分大时，有
$$Q_q(t)-P_q(t)+\varepsilon>0,$$
从而
$$((Q_q(A)-P_q(A)+\varepsilon I)x,x)>0.$$
令$q\to+\infty$，再令$\varepsilon\to 0$，则有
$$((G(A)-F(A))x,x)\geqslant 0,\quad \forall\ x\in H.$$
故$G(A)-F(A)\geqslant 0$，即$G(A)\geqslant F(A)$. ▌

对于多项式不减序列的极限定义的函数$F_i(t)$对应于$F_i(A)$算子($i=1,2$)，则$\sum a_iF_i(t)$ ($a_i\geqslant 0$)对应于$\sum a_iF_i(A)$算子；$F_1(t)F_2(t)$对应于$F_1(A)F_2(A)$算子. 但$F_1(t)-F_2(t)$对应于$F_1(A)-F_2(A)$不由不减序列的极限而定义，则此对应只是规定. 然而，此规定并不矛盾. 事实上，若
$$F_1(t)-F_2(t)=F_3(t)-F_4(t),$$
即
$$F_1(t)+F_4(t)=F_2(t)+F_3(t),$$
从而
$$F_1(A)+F_4(A)=F_2(A)+F_3(A)$$
故
$$F_1(A)-F_2(A)=F_3(A)-F_4(A).$$

以上所论乃实系数多项式和此类多项式的不减序列的极限函数以及这些函数的和差积构成的全体函数所成的集合，并记为(N). 一般地，(N)的任意二元$F(t)$,$G(t)$或为增加的多项式序列的极限或为这样的极限之差. 故有
$$F(t)=F_1(t)-F_2(t),\quad G(t)=G_1(t)-G_2(t),$$
其中F_1,F_2,G_1,G_2或为多项式或为多项式增加序列的极限. 因而

$$F(t)+G(t)=(F_1(t)+G_1(t))-(F_2(t)+G_2(t))$$
$$F(t)-G(t)=(F_1(t)+G_2(t))-(F_2(t)+G_1(t))$$

从而

$$(F_1(A)+G_1(A))-(F_2(A)+G_2(A))=F(A)+G(A),$$
$$(F_1(A)+G_2(A))-(F_2(A)+G_1(A))=F(A)-G(A),$$

并且，由

$$\begin{aligned}F(t)G(t)&=(F_1(t)-F_2(t))(G_1(t)-G_2(t))\\&=(F_1(t)G_1(t)+F_2(t)G_2(t))-(F_1(t)G_2(t)\\&\quad+F_2(t)G_1(t)),\end{aligned}$$

我们有

$$(F_1(A)G_1(A)+F_2(A)G_2(A))-(F_1(A)G_2(A)+F_2(A)G_1(A))$$
$$=F(A)G(A),$$

且 $F(A)$，$G(A)$ 为可交换算子．

综上所述，我们得下面定理 2.4.3.

定理 2.4.3 (N) 内任意函数 $F(t)$ 对应于唯一的 Hermite 算子 $F(A)$，并且有界．(N) 内的函数 $F(t)$，$G(t)$ 所对应的算子 $F(A)$，$G(A)$ 为可交换的，并且 $F(t)\pm G(t)$，$F(t)\cdot G(t)$ 分别对应于 $F(A)\pm G(A)$，$F(A)\cdot G(A)$.

定理 2.4.4 设 A 为有界的 Hermite 线性算子于 Hilbert 空间 H 内．区间 $m\leqslant t\leqslant M$（m，M 分别为 A 的下确界和上确界）上的连续函数及连续函数的不减序列的极限函数之全体表为 (N_0)．则 (N_0) 为 (N) 的子集，从而 (N_0) 所属函数 $F(t)$ 必对应于唯一的 Hermite 算子 $F(A)$.

证明 任给 $m\leqslant t\leqslant M$ 上的连续函数 $F(t)$，可选多项式 $P_n(t)$，使得

$$\left|F(t)-\frac{1}{2^n}-P_n(t)\right|<\frac{1}{2^{n+2}}.$$

这是 Weierstrass 定理的直接结果．由于

$$\left|P_{n+1}(t)-P_n(t)-\frac{1}{2^{n+1}}\right|<\frac{1}{2^{n+1}},$$

于是,必有

$$P_{n+1}(t)-P_n(t)>0,$$

即

$$P_{n+1}(t)>P_n(t).$$

故 $F(t)$ 为实系数多项式增加序列的极限,即 $F(t)\in(N)$. 其次,连续函数的增加序列

$$F_1(t),F_2(t),\cdots,F_n(t),\cdots$$

的极限 $F(t)$ 亦为多项式的增加序列的极限. 事实上,满足

$$\left|F_n(t)-\frac{1}{2^n}-P_n(t)\right|<\frac{1}{2^{n+2}}$$

的 $P_n(t)$ 存在,且 $P_{n+1}(t)>P_n(t)$. 故 $P_n(t)\to F(t)(n\to\infty)$. 从而定理获证. ▎

定理 2.4.5 (N_0) 所属函数 $F(t)$ 在 $m\leqslant t\leqslant M$ 上满足 $F(t)\geqslant 0$,则 $F(t)$ 对应的算子 $F(A)$ 为正的 Hermite 算子.

证明 令 $G(t)=F(t)+\varepsilon(\varepsilon>0)$. 则 $G(t)\geqslant\varepsilon>0$. 从而 $G(t)$ 为多项式的不减序列

$$P_1(t)\leqslant P_2(t)\leqslant\cdots\leqslant P_n(t)\leqslant\cdots$$

的极限,则有 $k>k_0$ 使得 $P_k(t)\geqslant 0$,即有 $P_k(A)\geqslant 0$. 所以

$$G(A)=F(A)+\varepsilon I\geqslant 0.$$

令 $\varepsilon\to 0$,则得 $F(A)\geqslant 0$. 故定理得证. ▎

定理 2.4.6 设 (N_0) 所属函数的序列 $\{F_n(t)\}$ 使得

$$F_1(t)\leqslant F_2(t)\leqslant\cdots \text{ 且 } F_n(t)\to F(t)\quad(n\to\infty).$$

则

$$F_1(A)\leqslant F_2(A)\leqslant\cdots \text{ 且 } F_n(A)\to F(A)\quad(n\to\infty).$$

证明 依定理 2.4.4 的证法可以选出多项式序列 $\{P_n(t)\}$ 使得

$$P_1(t)\leqslant P_2(t)\leqslant\cdots\leqslant P_n(t)\leqslant\cdots,$$

$$P_n(t)\leqslant F_n(t) \text{ 且 } P_n(t)\to F(t)\quad(n\to\infty).$$

则有 $P_n(A)\to F(A)(n\to\infty)$, $P_n(A)\leqslant F_n(A)\leqslant F(A)$. 故

$$F_n(A)\to F(A)\ (n\to\infty).$$

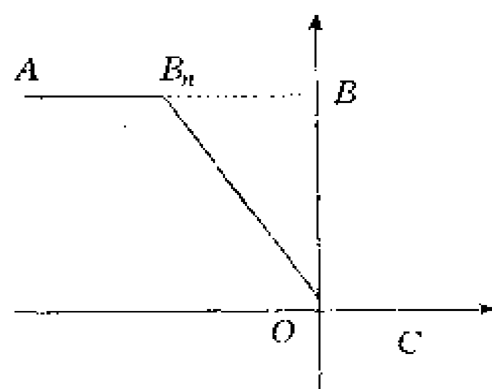
因此定理得证. ▌

§2.5

谱系与谱分解

定义一个函数 $E_-(t)$ 如下:

$$E_-(t)=\begin{cases}1, & t<0,\\ 0, & t\geqslant 0.\end{cases}$$



则 $E_-(t)$ 以 O 点为不连续点,并且 $E_-(t)\in(N_0)$. 事实上,如图取 $OB=1$, $BB_n=\frac{1}{n}$, $F_n(t)$ 为折线 AB_nOC 所表的连续函数,则

$$F_n(t)\leqslant F_{n+1}(t)\ 且\ F_n(t)\to E_-(t)\ (n\to\infty).$$

从而对应于 $E_-(t)$ 的 Hermite 算子 $E_-(A)$ 必然存在,并且由 $(E_-(t))^2=E_-(t)$ 可得 $(E_-(A))^2=E_-(A)$. 故 $E_-(A)$ 为投影算子. $I-E_-(A)$ 亦为投影算子,以 $E_+(A)$ 表之. 显然,对于 $E_-(A)$ 与 $E_+(A)$,我们有:

(i) $E_+(A)E_-(A)=E_-(A)E_+(A)=0$;

(ii) $E_-(A)$ 及 $E_+(A)$ 同为正算子;

(iii) $tE_-(t)\leqslant 0\Rightarrow AE_-(A)\leqslant 0$;

$tE_+(t)\geqslant 0\Rightarrow AE_+(A)\geqslant 0$,

其中 $AE_-(A)$ 与 $AE_+(A)$ 为分别对应于 $tE_-(t)$ 和 $tE_+(t)$ 的算子;

(iv) 由 $E_-(0)=0$, $E_+(0)=1$, 可知对于 $Ax=0$ 的 x,必有

$$E_-(A)x=0,\ E_+(A)x=x.$$

于是，我们得到下面关于 Hermite 算子 A 的分解定理．

定理 2.5.1　对于有界的 Hermite 算子 A，常可定出正算子 $E_-(A)$，$E_+(A)$，使得

$$I=E_-(A)+E_+(A).$$

其中 $E_-(A)^2=E_-(A)$，$E_+(A)^2=E_+(A)$．从而，A 常可分解为

$$A=AE_+(A)+AE_-(A),$$

其中 $AE_-(A)$ 为负算子，$AE_+(A)$ 为正算子，并且对于 $Ax=0$ 的 $x\in H$，必有 $E_-(A)x=0$，$E_+(A)x=x$．　▌

定义一个函数 $f_\lambda(t)=\begin{cases}1, t<\lambda,\\ 0, t\geqslant\lambda.\end{cases}$ 则 $f_\lambda(t)\in(N_0)$．设 A 为 Hilbert 空间 H 内的 Hermite 有界线性算子且 $m\|x\|\leqslant\|Ax\|\leqslant M\|x\|$．$f_\lambda(t)$ 相应于算子 $f_\lambda(A)$，此以 $E(\lambda)$ 表之．因 $f_\lambda(t)^2=f_\lambda(t)$，则 $E(\lambda)^2=E(\lambda)$．故 $E(\lambda)$ 为投影算子．$\lambda=0$ 时，$E(0)=E_-(A)$．下面我们给出关于算子 $f_\lambda(A)=E(\lambda)$ 的几个重要性质．

性质 I　若 $\lambda\leqslant\mu$，则

$$E(\lambda)E(\mu)=E(\mu)E(\lambda)=E(\lambda).$$

证明　由于 $f_\lambda(t)$，$f_\mu(t)$ 分别对应于 $f_\lambda(A)(=E(\lambda))$ 和 $f_\mu(A)(=E(\mu))$，于是，根据定理 2.4.3，$f_\lambda(A)$ 和 $f_\mu(A)$ 均为可交换算子．所以

$$f_\lambda(A)f_\mu(A)=f_\mu(A)f_\lambda(A).$$

又由

$$f_\lambda(t)f_\mu(t)=f_\lambda(t), \lambda\leqslant\mu,$$

可得

$$f_\lambda(A)f_\mu(A)=f_\lambda(A).$$

故性质 I 获证．　▌

性质 II　(i)　若 $\lambda\leqslant\mu$，则 $E(\lambda)\leqslant E(\mu)$；

(ii)　若 $\lambda\to\mu$，则 $E(\lambda)\to E(\mu)$．

证明　由于 $E(\lambda)$ 作为 λ 的函数乃是左连续的函数，于是，根据定理 2.4.4 和 2.4.5，以及

$$\begin{cases} f_\lambda(t) \leqslant f_\mu(t), \lambda \leqslant \mu, \\ f_\lambda(t) \to f_\mu(t), \lambda \to \mu, \end{cases}$$

得出性质Ⅱ的证明. ▌

性质Ⅲ (i) 若 $\lambda \leqslant m$, 则 $E(\lambda) = 0$;

(ii) 若 $\lambda \geqslant M$, 则 $E(\lambda) = I$.

证明 由于

$$f_\lambda(t) = \begin{cases} 0, \lambda \leqslant t; \\ 1, \lambda > t; \end{cases} \quad E(\lambda) = f_\lambda(A),$$

$$m \| x \| \leqslant \| Ax \| \leqslant M \| x \|,$$

于是,当 $\lambda \leqslant m$ 时, $\lambda \leqslant t$, 则 $f_\lambda(t) = 0$, 所以

$$E(\lambda) = f_\lambda(A) = 0.$$

当 $\lambda \geqslant M$ 时, $\lambda > t$, 则 $f_\lambda(t) = 1$, 所以

$$E(\lambda) = f_\lambda(A) = I.$$

故性质Ⅲ得证. ▌

性质Ⅳ 若 $\lambda < \mu$, 则 $\Delta = E(\mu) - E(\lambda)$ 满足 $\Delta^2 = \Delta$.

证明 由性质Ⅰ,

$$E(\mu)E(\lambda) = E(\lambda)E(\mu) = E(\lambda), \lambda \leqslant \mu.$$

于是,根据定理 2.1.4, Δ 为投影算子, Δ 为正算子($\Delta \geqslant 0$), 即 $E(\mu) \geqslant E(\lambda)$. 故 $\Delta^2 = \Delta$. ▌

性质Ⅴ $(A - \lambda I)\Delta$ 为正算子, $(A - \mu I)\Delta$ 为负算子, 并且

$$\lambda(\Delta x, x) \leqslant (A\Delta x, x) \leqslant \mu(\Delta x, x),$$

其中 $\lambda \leqslant \mu$, 且 $\lambda \leqslant \| A \| \leqslant \mu$.

证明 $(A - \lambda I)\Delta$ 为对应于 $(t - \lambda)(f_\mu(t) - f_\lambda(t))$ 的算子. 但

$$f_\mu(t) - f_\lambda(t) = \begin{cases} 1, \lambda \leqslant t \leqslant \mu, \\ 0, \text{其他}, \end{cases}$$

故 $(t - \lambda)(f_\mu(t) - f_\lambda(t)) \geqslant 0$, 因而,

$$(A - \lambda)(f_\mu(A) - f_\lambda(A)) \geqslant 0,$$

即

$$(A - \lambda I)\Delta \geqslant 0.$$

同理可证 $(A-\mu I)\Delta\leqslant 0$.

由于$(A-\lambda I)\Delta$ 为正算子,$(A-\mu I)\Delta$ 为负算子,即

$$((A-\lambda I)\Delta x,x)\geqslant 0,\ ((A-\mu I)\Delta x,x)\leqslant 0,$$

此即

$$(A\Delta x,x)-(\lambda I\Delta x,x)\geqslant 0,$$
$$(A\Delta x,x)-(\mu I\Delta x,x)\leqslant 0.$$

故我们得

$$\lambda(\Delta x,x)\leqslant(A\Delta x,x)\leqslant\mu(\Delta x,x).$$ ▌

以上关于 $f_\lambda(A)=E(\lambda)$ 之族叫做 A 的谱族(Spektralschar),而分解式:

$$I=E_-(A)+E_+(A)$$

为 Neumann 单位分解定理.

在区间 $m\leqslant t\leqslant M$ 上插入分点 $\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_n$, $m=\lambda_0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_n=M$. 令 $E(\lambda_k)=E_k$, $\Delta_k=E_{k+1}-E_k=E(\lambda_{k+1})-E(\lambda_k)$. 则 Δ_0, $\Delta_1,\cdots,\Delta_{n-1}$为 n 个投影算子序列,并且

$$E(\lambda_0)=E(m)=0,\ E(\lambda_n)=E(M)=I,$$
$$\Delta_0+\Delta_1+\cdots+\Delta_{n-1}=E_n-E_0=I,$$
$$\begin{aligned}\Delta_i\Delta_k&=(E_{i+1}-E_i)(E_{k+1}-E_k)\\&=E_{i+1}E_{k+1}-E_{i+1}E_k-E_iE_{k+1}+E_iE_k.\end{aligned}$$

若 $i<k$,则由性质 I,

$$E_{i+1}E_{k+1}=E_{i+1},\ E_iE_{k+1}=E_i,$$
$$E_{i+1}E_k=E_{i+1},\quad E_iE_k=E_i.$$

从而 $\Delta_i\Delta_k=0$. 若 $i>k$,则由 Δ_i 与 Δ_k 可交换,得 $\Delta_k\Delta_i=0$. 故

$$\Delta_0,\Delta_1,\cdots,\Delta_{n-1}$$

为一正交系,亦是一个完全正交系. 事实上,若 $\Delta\Delta_i=0(i=0,1,2,\cdots,n-1)$,则

$$\Delta I=\sum\Delta\Delta_i=0,$$

从而 $\Delta=\Delta I=0$. 兹以 Δ_k 施于 $x\in H$,令 $\Delta_k x=x^{(k)}$. 则

$$I=\Delta_0+\Delta_1+\cdots+\Delta_{n-1}$$

施于 x 有

$$\Delta_0 x+\Delta_1 x+\cdots+\Delta_{n-1}x=Ix=x,$$

即是

$$x=x^{(0)}+x^{(1)}+\cdots+x^{(n-1)},$$

并且

$$(x^{(i)},x^{(k)})=(\Delta_i x,\Delta_k x)=(x,\Delta_i\Delta_k x)$$
$$=(x,0)=0.$$

故 x 可分解为 n 个元素 $x^{(0)},\cdots,x^{(n-1)}$之和，而这些$\{x^{(i)}\}$乃构成正交集．由于 Δ_i 为投影算子，且 $\Delta_i^2=\Delta_i$，所以，

$$\|x\|^2=(x,x)=(Ix,x)=((\Delta_0+\cdots+\Delta_{n-1})x,x)$$
$$=\sum_{i=0}^{n-1}(\Delta_i x,x)=\sum_{i=0}^{n-1}(\Delta_i^2 x,x)$$
$$=\sum_{i=0}^{n-1}(\Delta_i x,\Delta_i x)=\sum_{i=0}^{n-1}\|\Delta_i x\|^2.$$

故有

$$\|x\|^2=\sum_{i=0}^{n-1}\|\Delta_i x\|^2=\sum_{i=0}^{n-1}\|x^{(i)}\|.$$

由 $E(\lambda)$的性质 V，我们有

$$\lambda_k(\Delta_k x,x)\leqslant(A\Delta_k x,x)\leqslant\lambda_{k+1}(\Delta_k x,x).$$

任取 μ_k，使得 $\lambda_k\leqslant\mu_k\leqslant\lambda_{k+1}$，则

$$|(A\Delta_k x-\mu_k\Delta_k x,x)|\leqslant(\lambda_{k+1}-\lambda_k)(\Delta_k x,x).$$

由于

$$((A-\mu_k I)\Delta_k x,x)=((A-\mu_k I)\Delta_k^2 x,x)$$
$$=((A-\mu_k I)\Delta_k x,\Delta_k x),$$

于是，令 $y=\Delta_k x$．则有

$$|((A-\mu_k I)y,y)|\leqslant(\lambda_{k+1}-\lambda_k)\|y\|^2.$$

因为 $A-\mu_k I$ 为 Hermite 算子，所以$\|(A-\mu_k I)y\|$ 在$\|y\|\leqslant1$ 时的上确界与$|((A-\mu_k I)y,y)|$在$\|y\|\leqslant1$ 的上确界相等，并且$\leqslant$

$(\lambda_{k+1}-\lambda_k)$. 去掉 $\|y\|\leqslant 1$ 的限制，则我们有

$$\|(A-\mu_k I)\Delta_k x\|\leqslant(\lambda_{k+1}-\lambda_k)\|\Delta_k x\|.$$

兹证 $(A-\mu_k I)\Delta_k x(k=0,1,2,\cdots,n-1)$ 成一正交系. 由于

$$\begin{aligned}&((A-\mu_k I)\Delta_k x,(A-\mu_i I)\Delta_i x)\\&=((A-\mu_k I)x,(A-\mu_i I)\Delta_i\Delta_k x)\\&=((A-\mu_k I)x,0)=0,i\neq k.\end{aligned}$$

故有

$$\begin{aligned}&\left(\sum_{k=0}^{n-1}(A-\mu_k I)\Delta_k x,\sum_{k=0}^{n-1}(A-\mu_k I)\Delta_k x\right)\\&\quad=\left\|\sum_{k=0}^{n-1}(A-\mu_k I)\Delta_k x\right\|^2\\&\quad=\sum_{k=0}^{n-1}((A-\mu_k I)\Delta_k x,(A-\mu_k I)\Delta_k x)\\&\quad=\sum_{k=0}^{n-1}\|(A-\mu_k I)\Delta_k x\|^2.\end{aligned}$$

令 $\delta=\max(\lambda_{k+1}-\lambda_k)$. 则

$$\|(A-\mu_k I)\Delta_k x\|\leqslant\delta\|\Delta_k x\|,k=0,1,\cdots,n-1.$$

从而，我们有

$$\left\|\sum_{k=0}^{n-1}(A-\mu_k I)\Delta_k x\right\|^2\leqslant\delta^2\sum_{k=0}^{n-1}\|\Delta_k x\|^2=\delta^2\|x\|.$$

注意 $\sum_{k=0}^{n-1}\Delta_k x=Ix=x$，则

$$\left\|Ax-\sum_{k=0}^{n-1}\mu_k\Delta_k x\right\|\leqslant\delta\|x\|.$$

令 $\delta\to 0$，则

$$\sum_{k=0}^{n-1}\mu_k\Delta_k x\to Ax,$$

即

$$\lim_{\delta\to 0}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\mu_k\Delta_k x,x\right)=(Ax,x).$$

注意

$$\left(\sum_{k=0}^{n-1} \mu_k \Delta_k x, x\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \mu_k (\Delta_k x, x)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \mu_k ((E_{k+1} - E_k) x, x),$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} ((E_{k+1} - E_k) x, x) = (x, x).$$

故若令

$$\Phi(\lambda) = (E(\lambda) x, x),$$

则 $\Phi(\lambda)$ 为 $m \leqslant t \leqslant M$ 上的有界变差函数. 从而

$$\lim_{\delta \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \mu_k (\Phi(\lambda_{k+1}) - \Phi(\lambda_k))$$

$$= \int_m^M \lambda d\Phi(\lambda) = \int_m^M \lambda d(E(\lambda) x, x).$$

此为 Stieltjes 积分. 故得

$$(Ax, x) = \int_m^M \lambda d(E(\lambda) x, x).$$

同理,

$$(x, x) = \int_m^M d(E(\lambda) x, x).$$

定理 2.5.4 设 A 为 Hilbert 空间内的有界线性 Hermite 算子,$E(\lambda)$ 为 A 的谱族. 则有

$$(x, x) = \int_m^M d(E(\lambda) x, x),$$

$$(Ax, x) = \int_m^M \lambda d(E(\lambda) x, x).$$

依此定理,又可表为形式积分如下:

$$I = \int_m^M dE(\lambda),$$

$$A = \int_m^M \lambda dE(\lambda).$$

前面关于 $\lambda < \mu$, $\Delta = E(\mu) - E(\lambda)$ 乃是投影算子,即为 (N_0) 的

函数

$$g(t)=\begin{cases}1, & \lambda\leqslant t<\mu\\ 0, & t\geqslant\mu, t<\lambda\end{cases}$$

所对应的 Hermite 算子．故当 $\mu\to\lambda$ 时 $g(t)$ 收敛于函数

$$h_\lambda(t)=\begin{cases}1, & t=\lambda\\ 0, & t\neq\lambda\end{cases}.$$

但 $g(t)$ 收敛于 $h_\lambda(t)$ 乃是递减的而非递增的，而前面的论断只适于后者故须从 $-g(t)$ 递增而以 $-h_\lambda(t)$ 为极限入手，证明 $g(t)$ 对应的算子 Δ 的极限为 $h_\lambda(t)$ 所对应的 Hermite 算子 $h_\lambda(A)$，即 $h_\lambda(A)=P(\lambda)=E(\lambda+0)-E(\lambda)$．故当 $\mu>\lambda$；$\mu\to\lambda$ 时，$\Delta\to P(\lambda)$．由于 $E(\lambda)^2=E(\lambda)$，则 $E(\lambda+0)^2=E(\lambda+0)$．故 $P(\lambda)^2=P(\lambda)$．从而，由 $\lambda\neq\mu$，可推得 $h_\lambda(t)h_\mu(t)=0$．因此，当 $\lambda\neq\mu$ 时，投影算子 $P(\lambda)$ 与 $P(\mu)$ 正交．不论 $\mu_1,\cdots,\mu_p$ 如何，$\sum\limits_{i=1}^{p} h_{\mu_i}(t)\leqslant 1$ 而有

$$\sum_{i=1}^{p} P(\mu_i)\leqslant I,$$

从而，我们得

$$\sum_{i=1}^{p}(P(\mu_i)x,x)\leqslant(x,x),$$

即有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{p}(P(\mu_i)^2x,x)&=\sum_{i=1}^{p}(P(\mu_i)x,P(\mu_i)x)\\ &=\sum_{i=1}^{p}\|P(\mu_i)x\|^2\leqslant\|x\|^2.\end{aligned}$$

由此可见，当 $\|x\|\leqslant 1$ 时，$\|P(\mu)x\|^2\geqslant 1$ 的 μ_i 至多只有一个，其使 $\|P(\mu)x\|^2\geqslant\frac{1}{2}$ 者的 μ_i 至多只有二个，…．继续论证下去，则使 $\|P(\mu)x\|^2>0$ 的 μ 至多只有可数多个，而此可数多个 μ（不一定依大小的顺序）可写为

$$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n,\cdots.$$

这些就叫做 A 的点谱．以 P_k 表 $P(\lambda_k)$，则有

$$\sum_{k=1}^{N}\|P_kx\|^2\leqslant\|x\|^2.$$

就此令 $N\to+\infty$，则左边为收敛级数

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\|P_kx\|^2\leqslant\|x\|^2,P_k^2=P_k,P_iP_k=0(i\neq k).$$

故 $\{P_i\}$ 为一正交系．

假设 $(E(\lambda)x,x)$ 在点谱以外之点处为常数并且假设点谱只可能以 $\lambda=0$ 为聚点．则在区间 $m\leqslant t\leqslant M$ 上点谱可写为

$$m\leqslant\lambda_1'<\lambda_2'<\cdots<0<\cdots<\lambda_1\leqslant M.$$

在点谱处 $(P(\lambda)x,x)>0$，在点谱外 $(P(\lambda)x,x)=0$．

$$(P(\lambda)x,x)=\lim_{\mu\to\lambda+0}\{(E(\mu)x,x)-(E(\lambda)x,x)\}.$$

则

$$\begin{aligned}(Ax,x)&=\int_m^M\lambda d(E(\lambda)x,x)\\&=\sum_{k=1}^{+\infty}\lambda_k'(P(\lambda_k')x,x)+\sum_{k=1}^{+\infty}\lambda_k(P(\lambda_k)x,x)\\&=\sum_{k=1}^{+\infty}\lambda_k'\|P(\lambda_k')x\|^2+\sum_{k=1}^{+\infty}\lambda_k\|P(\lambda_k)x\|^2.\end{aligned}$$

同样可得

$$(x,x)=\int_m^M d(E(\lambda)x,x)=\sum_{k=1}^{+\infty}\|P(\lambda_k')x\|^2+\sum_{k=1}^{+\infty}\|P(\lambda_k)x\|^2.$$

这就是所谓特征值问题的正常解答．

反之，如果 $(E(\lambda)x,x)$ 在一个区间 J 上决不为常数，则 $\int_J\lambda d(E(\lambda)x,x)$ 及 $\int_J d(E(\lambda)x,x)$ 决不为 0．此时 J 称为 A 的连续谱．故若 A 之连续谱存在，则 (x,x) 及 (Ax,x) 决不能写成平方和的形式．

Hermite 算子的分解定理 A 可分解为 B 与 C 之和：$A=B+C$，其中 B 为具有点谱的 Hermite 算子，C 为除了连续谱以外最多具有以 0 为聚点的点谱的 Hermite 算子．

证明 由于 $P(\lambda)=E(\lambda+0)-E(\lambda)$ 相应于函数

$$h_\lambda(t)=\begin{cases}0, t\neq\lambda,\\ 1, t=\lambda,\end{cases}$$

$th_\lambda(t)$ 相应于 $AP(\lambda)$，并且

$$th_\lambda(t)=\begin{cases}\lambda, t=\lambda\\ 0, t\neq\lambda\end{cases}$$

对应于 $\lambda P(\lambda)$. 故

$$AP(\lambda)=P(\lambda)A=\lambda P(\lambda).$$

从而，我们有

$$(A-\lambda I)P(\lambda)=P(\lambda)(A-\lambda I)=0.$$

因为 $P(\lambda)$ 在 λ 为点谱 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots$ 处不为 0，而

$$(A-\lambda I)P(\lambda)x=0.$$

则以 y 代 $P(\lambda)x$ 有

$$(A-\lambda I)y=0.$$

于是，当 $\lambda=\lambda_k$ 时，$y\neq0$，而得

$$Ay=\lambda y.$$

换言之：当 λ 取值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots$ 时则满足

$$Ay=\lambda y$$

的不为 0 的 $y\in H$ 存在，这样的 y 乃相应于特征值 λ 的特征元素 $y=P(\lambda)x$. ∎

第 三 章

樊畿关于算子函数的不等式理论

本章将用来叙述樊畿关于算子函数的基本理论，这主要是关于一系列经典定理和经典不等式的算子化．正是这些工作导致了算子函数理论的确立并且为该理论的发展奠定了基础．我们将首先致力于算子解析函数的某些基本不等式，叙述并证明樊氏关于真压缩算子的基本定理；之后将给出算子函数的 Schwarz 引理，Julia 引理以及 Pick-Julia 定理的算子化；最后我们将研究算子解析函数在重叠过程中的某些性质以及 von Neumann 不等式的更为精确的形式．

§3.1

算子函数的基本定理

设 A 为 Hilbert 空间 H 内的有界线性算子，A 具有逆算子 A^{-1}，则 $(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*$．A 的谱集合为 $\sigma(A)$，其谱半径 $r_\sigma(A)=\sup\limits_{z\in\sigma(A)}|z|$；$A^*$ 的谱集合为 $\sigma(A^*)$，其谱半径 $r_\sigma(A^*)=\sup\limits_{z\in\sigma(A^*)}|z|$．$((zI-A)^*)^{-1}$ 随 $(zI-A)^{-1}$ 之存在且连续而亦存在且连续，其逆亦真．事实上，若 $z\in\sigma(A)$，则 $\bar{z}\in\sigma(A^*)$；若 $\bar{z}\in\sigma(A^*)$，则 $z\in\sigma(A)$，但 $|z|=|\bar{z}|$，故 $r_\sigma(A)=r_\sigma(A^*)$．反之，由于 $|z|>r_\sigma(A)$ 当

且仅当$|\bar{z}|>r_\sigma(A^*)$，则当$|z|>r_\sigma(A)$时，$((zI-A)^*)^{-1}=(\bar{z}I-A^*)^{-1}$随$(zI-A)^{-1}$之存在及连续而亦存在及连续.

设$f(z)$为$\Delta=\{z;|z|<1\}$内的解析函数并且$|f(z)|<1(z\in\Delta)$. 设有界线性算子A的谱集合在圆盘Δ内，其谱半径$r_\sigma(A)=\sup\limits_{z\in\sigma(A)}|z|\leqslant\|A\|<1$. 选取$r$使得$\|A\|<r<1$，则预解式$(zI-A)^{-1}$存在且连续，并且在$|z|=r$上

$$(zI-A)^{-1}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{A}{z}\right)^n\cdot\frac{1}{z}.$$

依 Dunford 积分意义：

$$\begin{aligned}f(A)&=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r(\text{取正向})}f(z)(zI-A)^{-1}dz\\&=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nA^n,\end{aligned}$$

其中$a_n=\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$，$n=0,1,2,\cdots$. 我们称此算子$f(A)$为 Hilbert 空间$H$上的算子解析函数.

由谱影照定理(定理 2.3.3)知$f(A)$的谱集合$\sigma(f(A))=f(\sigma(A))$. 圆盘$\Omega:|z|\leqslant r_\sigma(A)<1$包含谱集合$\sigma(A)$. 则$f(\Omega)\supseteq f(\sigma(A))$，并且$f(\Omega)$为$\Delta$内的闭集. 故$\sigma(f(A))$包含在闭集$\{|z|\leqslant R_{f(\Omega)}\}$内. 令

$$\rho=\max\{R_{f(\Omega)},r_\sigma(A)\}.$$

则当$|z|>\rho$时，$|z|>r_\sigma(A)$，从而$(zI\pm A)^{-1}$及$(\bar{z}I\pm A^*)^{-1}$均存在且连续；当$|z|>\rho$时，$|z|>R_{f(\Omega)}$，从而$(zI\pm f(A))^{-1}$及$(zI\pm f(A)^*)^{-1}$均存在且连续.

有了以上这些认识，我们就可以证明算子函数的基本定理，即樊氏定理 1. 但在此之前，我们首先证明下面一个等价关系.

引理 3.1.1 设A为 Hilbert 空间H内的真压缩算子($\|A\|<1$). 设函数$f(z)$在Δ内解析且$|f(z)|<1(z\in\Delta)$. 则$I-f(A)^*f(A)>0$当且仅当$\mathrm{Re}\,g(A)>0$，其中$g(z)=\dfrac{1+f(z)}{1-f(z)}$.

证明 由于

$$
\begin{aligned}
2\mathrm{Reg}(A) &= (I+f(A))(I-f(A))^{-1}+[(I+f(A))(I-f(A))^{-1}]^* \\
&= (I+f(A))(I-f(A))^{-1} \\
&\quad +(I-f(A)^*)^{-1}(I+f(A)^*) \\
&= (I-f(A)^*)^{-1}\{(I-f(A)^*)(I+f(A)) \\
&\quad +(I+f(A)^*)(I-f(A))\}(I-f(A))^{-1} \\
&= 2(I-f(A)^*)^{-1}T(A)(I-f(A))^{-1},
\end{aligned}
$$

其中 $T(A)=I-f(A)^*f(A)$. 从而

$$
\mathrm{Reg}(A)=(I-f(A)^*)^{-1}T(A)(I-f(A))^{-1}. \tag{3.1.1}
$$

故 $\mathrm{Reg}(A)$ 及 $f(A)^*f(A)$ 都是 Hermite 算子. 因此,可以定义 $\mathrm{Reg}(A)>0$ 及 $I-f(A)^*f(A)>0$.

设 $\mathrm{Reg}(A)>0$,则 $(\mathrm{Reg}(A)x,x)\geqslant 0$,并且 $(\mathrm{Reg}(A))^{-1}$ 存在且唯一. 因而

$$
((I-f(A)^*)^{-1}T(A)(I-f(A))^{-1}x,x)\geqslant 0, \forall\ x\in H;
$$

即

$$
(T(A)(I-f(A))^{-1}x,(I-f(A))^{-1}x)\geqslant 0, \forall\ x\in H,
$$

故对任意的 $y\in H$,我们有

$$
(T(A)y,y)\geqslant 0.
$$

由于 $(\mathrm{Reg}(A))^{-1}$ 存在且唯一,则 $T(A)$ 的逆亦存在且唯一,并且

$$
T(A)^{-1}=(I-f(A))^{-1}(\mathrm{Reg}(A))^{-1}(I-f(A)^*)^{-1}.
$$

故 $T(A)>0$,即 $I-f(A)^*f(A)>0$.

反之,设 $T(A)>0$,则 $(T(A)y,y)\geqslant 0\ (\forall\ y\in H)$,并且 $T(A)^{-1}$ 存在且唯一. 据此,令 $y=(I-f(A))^{-1}x\ (x\in H)$,则有

$$
(T(A)(I-f(A))^{-1}x,(I-f(A))^{-1}x)\geqslant 0,
$$

即

$$
((I-f(A)^*)^{-1}T(A)(I-f(A))^{-1}x,x)\geqslant 0, \forall\ x\in H,
$$

亦即

$$
(\mathrm{Reg}(A)x,x)\geqslant 0,
$$

并且 $(\mathrm{Reg}(A))^{-1}$ 存在且唯一;

$$(\operatorname{Re} g(A))^{-1}=(I-f(A))T(A)^{-1}(I-f(A)^*).$$

故 $\operatorname{Re} g(A)>0$. 从而引理得证. ▌

根据上述论证，我们得到下面的关系：

$$\operatorname{Re}g(A)>0 \Leftrightarrow I-f(A)^*f(A)>0 \Leftrightarrow \|f(A)\|<1.$$

为了使叙述简明，在后面的叙述中，如无特别申明，我们都将用以下符号表示各类函数：$H(\Delta)$表示 Δ 内的解析函数所构成的空间，其中 Δ 为复平面上的开单位圆盘；

$$B(\Delta)=\{f\in H(\Delta);|f(z)|<1,\forall\ z\in\Delta\};$$

$$B_0(\Delta)=\{f\in B(\Delta);f(0)=0\};$$

$$P(\Delta)=\{g\in H(\Delta);\operatorname{Re}g(z)>o,\forall\ z\in\Delta\};$$

$$P_0(\Delta)=\{g\in P(\Delta);g(0)=1\}.$$

令函数

$$g(z)=\frac{1+f(z)}{1-f(z)} \tag{3.1.2}$$

则

$$f(z)=\frac{g(z)-1}{g(z)+1} \tag{3.1.3}$$

显然，我们有

$$|f(z)|<1 \Leftrightarrow \operatorname{Re}g(z)>0,$$

即 $f\in B(\Delta)$当且仅当 $g\in P(\Delta)$.

利用引理 3.1.1，循环考虑引用 $B(\Delta)$ 及 $P(\Delta)$ 这两类函数族，我们就可以证明基本定理——樊氏定理 1[49].

定理 3.1.1(樊壥)　设 A 为 Hilbert 空间 H 内的真压缩算子. 则对每一函数 $f\in B(\Delta)$，$\|f(A)\|<1$，并且对每一函数 $g\in P(\Delta)$，$\operatorname{Re}g(A)>0$.

证明　由引理 3.1.1，易证定理中的两个结论是等价的. 从而，只要证明其中之一即可. 为了清楚起见，我们将证明过程分为六个步骤.

(i) 如果 $g\in P_0(\Delta)$，则 $\operatorname{Re}g(A)\geqslant 0$.

设 $g\in P_0(\Delta)$ 且 f 由(3.1.3)式给出，则 $f\in B_0(\Delta)$. 由 Schwarz 引理，我们有

$$|f(z)|\leqslant|z|, z\in\Delta,$$

此即

$$|g(z)-1|\leqslant|z|\,|g(z)+1|, z\in\Delta.$$

于是

$$|g(z)|\leqslant\frac{1+|z|}{1-|z|}, z\in\Delta.$$

这意味着，对每一 $g\in P_0(\Delta)$ 必在 Δ 内的每一紧子集上一致有界. 换句话说，当 $H(\Delta)$ 在 Δ 的紧子集上赋予通常的一致收敛拓扑时，$P_0(\Delta)$ 是局部凸向量空间 $H(\Delta)$ 内的有界集. 由于 $H(\Delta)$ 是 Montel 空间(参见:[71],P. 369;[96],P. 147)，并且有界集 $P_0(\Delta)$ 在 $H(\Delta)$ 内是闭的，所以 $P_0(\Delta)$ 是紧的. 根据 Holland 在[72]中的一个结果，$P_0(\Delta)$ 的极值点恰是形式为 $g_\eta(z)=(1+\eta z)(1-\eta z)^{-1}$ 的函数，其中 η 是 $|\eta|=1$ 的复数. 对于这种函数 g_η，我们有

$$g_\eta(A)=(I+\eta A)(I-\eta A)^{-1},$$

并且

$$\mathrm{Re}g_\eta(A)=(I-\bar{\eta}A^*)^{-1}(I-A^*A)(I-\eta A)^{-1}.$$

于是，由 $I-A^*A>0$，得出 $\mathrm{Re}g_\eta(A)>0$.

现在，考虑紧凸集 $P_0(\Delta)$ 中的任一函数 g. 由 Krein-Milman 定理，存在一序列 $\{h_n\}$ 属于 $\{g_\eta;|\eta|=1\}$ 的凸包，使得 $\{h_n\}$ 在 $H(\Delta)$ 内收敛于 g，即

$$\lim_{n\to\infty}h_n(z)=g(z)$$

在 Δ 的每一紧子集上一致成立. 从而，在 $\sigma(A)$ 的某一邻域内亦一致成立. 由性质 2.2.1，这意味着

$$\lim_{n\to\infty}\|h_n(A)-g(A)\|=0.$$

由此可得，对于所有 $x\in H$，

$$((\mathrm{Re}g(A))x,x)=\mathrm{Re}(g(A)x,x)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\mathrm{Re}(h_n(A)x,x).$$

由于 $\mathrm{Re}g_\eta(A)>0(|\eta|=1)$，故

$$\mathrm{Re}(h_\eta(A)x,x)\geqslant 0,x\in H.$$

因此，

$$((\mathrm{Re}g(A)x,x)\geqslant 0,x\in H,$$

即 $\mathrm{Re}g(A)\geqslant 0$，这就证明了(i).

(ii)如果 $g\in P(\Delta)$，则 $\mathrm{Re}g(A)\geqslant 0$.

若 $g\in P(\Delta)$，并且

$$h(z)=\frac{g(z)-i\mathrm{Im}(0)}{\mathrm{Re}g(0)},\tag{3.1.4}$$

则 $h\in P_0(\Delta)$，并且

$$\mathrm{Re}g(A)=[\mathrm{Re}g(0)]\cdot\mathrm{Re}h(A).\tag{3.1.5}$$

利用(i)的结论，我们有 $\mathrm{Re}h(A)\geqslant 0$. 因此，$\mathrm{Re}g(A)\geqslant 0$.

(iii)如果 $f\in B(\Delta)$，则 $\|f(A)\|\leqslant 1$.

此结论可利用(3.1.1)、(3.1.2)，然后由(ii)导出.

(iv)如果 $f\in B_0(\Delta)$，则 $\|f(A)\|\leqslant\|A\|$.

若 f 形如 $f(z)=\eta z$，其中 η 为 $|\eta|=1$ 的某一复常数，则我们有

$$\|f(A)\|=\|\eta A\|=\|A\|.$$

否则，由 Schwarz 引理，存在函数 $\varphi\in B(\Delta)$，使得

$$f(z)=z\varphi(z)\,(z\in\Delta).$$

由(iii)，$\|\varphi(A)\|\leqslant 1$. 因此，

$$\|f(A)\|=\|A\varphi(A)\|\leqslant\|A\|\cdot\|\varphi(A)\|\leqslant\|A\|.$$

(v)如果 $g\in P_0(\Delta)$，则 $\mathrm{Re}g(A)>0$.

任给 $g\in P_0(\Delta)$，考虑由(3.1.3)式定义的 f. 我们有 $f\in B_0(\Delta)$ 并且由(iv)，

$$\|f(A)\|\leqslant\|A\|<1,$$

从而，$I-f(A)^*f(A)>0$. 再由(3.1.3)式 $\mathrm{Re}g(A)>0$.

(vi)如果 $g\in P(\Delta)$，则 $\mathrm{Re}g(A)>0$.

任给 $g\in P(\Delta)$，利用(3.1.4)式定义 $h\in P_0(\Delta)$. 则由(v)，$\mathrm{Re}h(A)>0$，并且由(3.1.5)式，$\mathrm{Re}g(A)>0$. 定理证毕. ∎

上面所证的基本定理(樊氏定理1)与下面我们将要陈述的定理3.1.2，即 von Neumann 定理[93]具有密切的关系. 我们将看到这两个重要定理可以互相导出.

定理 3.1.2(von Neumann) 设 f 在闭单位圆盘 $\bar{\Delta}=\{z;|z|\leqslant 1\}$ 的某一邻域内解析，并且对于 $z\in\bar{\Delta}$，$|f(z)|\leqslant 1$. 如果 A 为 Hilbert 空间 H 内的压缩算子($\|A\|\leqslant 1$)，则 $f(A)$ 亦为压缩算子：$\|f(A)\|\leqslant 1$.

定理3.1.2的原始证明方法是利用 Schur 关于有界解析函数的一个结果给出的[93]. 还有其他一些著名的证明方法，例如，Heinz[67]利用傅氏级数的 Parseval 方程替代 Poisson 积分公式证明了此定理；Sz.-Nagy[113]应用算子的酉扩张也证明了该定理. 下面是樊壣给出的另一个证明方法，即利用定理3.1.1导出定理3.1.2.

定理 3.1.2 的证明 设 f 和 A 满足定理3.1.2的条件. 除了 $f(z)\equiv z$ 这一明显的情况外，不妨设 $f(z)$ 不为常数. 则由复值最大模原理，在 Δ 内 $|f(z)|<1$. 取 $0\leqslant r<1$，则 rA 为一真压缩算子. 从而，由定理3.1.1，$\|f(A)\|<1$. 选取 $\delta>0$，使得 $f(z)$ 在 $|z|<1+2\delta$ 内解析. 当 $r\to 1$ 时，$f(rz)$ 在 $|z|\leqslant 1+\delta$ 上一致收敛于 $f(z)$，并且 $\sigma(A)\subseteq\{z;|z|\leqslant 1+\delta\}$. 因此，由性质2.2.1，

$$\lim_{r\to 1}\|f(rA)-f(A)\|=0$$

即

$$\lim_{r\to 1}f(rA)=f(A),$$

故 $\|f(A)\|\leqslant 1$. 定理获证. ∎

反之，定理3.1.1亦可直接由定理3.1.2导出. 事实上，利用下面定理3.1.2的一个直接推论可证明定理3.1.1.

定理 3.1.3(最大模原理) 设 $f\in H(\Delta)$. 对于 $0\leqslant r<1$，令

$$M(r)=\max_{|z|=r}|f(z)|. \tag{3.1.6}$$

则

$$M(r)=\max_{\|A\|\leqslant r}\|f(A)\|, 0\leqslant r<1, \tag{3.1.7}$$

其中上式中的“max”是对一切在 H 上具有范数 $\leqslant r$ 的 A 而言．

证明　不妨设 f 不恒等于 0 且 $r>0$. 取固定的 r 使 $0<r<1$. 则有 $M(r)>0$. 令

$$g(z)=\frac{f(rz)}{M(r)}.$$

则 $g(z)$ 为 $|z|<\frac{1}{r}$ 内的解析函数．由最大模原理，对于 $z\in\bar{\Delta}$，$|g(z)|\leqslant 1$. 因此，根据定理 3.1.2，$\|g(A)\|\leqslant 1$，其中 A 为 H 内的任一压缩算子．换言之，对于 $\|A\|\leqslant 1$，都有

$$\|f(rA)\|\leqslant M(r).$$

此等价于对于 $\|A\|\leqslant r$. 都有

$$\|f(A)\|\leqslant M(r).$$

另外，若 $|z_0|=r$，$|f(z_0)|=M(r)$，则 $\|z_0I\|=r$ 且

$$\|f(z_0I)\|=\|f(z_0)I\|=M(r).$$

故(3.1.7)式成立．定理得证．　▌

例 3.1.1　Schottky 定理[68]可叙述为：对每一复数 $w\neq 0, 1$ 及 $0<r<1$，存在一正数 $M(w,r)$，使得

$$\|f(A)\|\leqslant M(f(0), \|A\|)$$

成立，其中 $f\in H(\Delta)$ 满足 $0\notin f(\Delta)$，$1\notin f(\Delta)$ 及 A 为 H 内任一非 0 的真压缩算子．

例 3.1.2 设 $f\in H(\Delta)$ 为单叶的，并且 $f(0)=0$，$f'(0)=1$. 则

$$\|f(A)\|\leqslant\frac{\|A\|}{(1-\|A\|)^2},$$

$$\|f'(A)\|\leqslant\frac{1+\|A\|}{(1-\|A\|)^3}.$$

§ 3.2

算子函数的 Schwarz 引理

我们知道复变函数的Schwarz 引理在研究解析函数的几何性质中起着重要的作用．类似地，在算子函数中，也有相应的结果，即算子函数的 Schwarz 引理[49]，并且在算子函数论中同样也起着很重要的作用．

定理 3.2.1 设 A 为 Hilbert 空间内的真压缩算子．$f,g,h\in H(\Delta)$ 使得 $f=gh$ 且对于 $z\in\Delta$，$|h(z)|\leqslant 1$. 则

$$g(A)^*g(A)\geqslant f(A)^*f(A), \tag{3.2.1}$$

$$\|g(A)\|\geqslant\|f(A)\|. \tag{3.2.2}$$

(3.2.1)式的不等号严格成立当且仅当 $g(A)^*g(A)>0$ 且 h 不为绝对值为 1 的常数．(3.2.2)式等式成立当且仅当 $g(A)=0$ 或 h 是一绝对值为 1 的常数．

证明 若 $h(z)\equiv\eta$ 且 $|\eta|=1$，则(3.2.1)和(3.2.2)式等号显然成立．现设 h 不是绝对值为 1 的常数．则由最大值原理，应有 $h\in B(\Delta)$. 因为

$$f(A)=h(A)g(A),$$

则对于 $x\in H$，我们有

$$\begin{aligned}(f(A)^*f(A)x,x)&=\|h(A)g(A)x\|^2\\&\leqslant\|h(A)\|^2\|g(A)x\|^2\\&=\|h(A)\|^2(g(A)^*g(A)x,x).\end{aligned}$$

从而

$$\|h(A)\|^2g(A)^*g(A)\geqslant f(A)^*f(A),$$

并且

$$g(A)^*g(A)-f(A)^*f(A)\geqslant(1-\|h(A)\|^2)g(A)^*g(A). \tag{3.2.3}$$

此外,由基本定理(定理 3.1.1),对于 $|h(z)|<1$,我们有 $\|h(A)\|<1$. 于是

$$(1-\|h(A)\|^2)g(A)^*g(A)\geqslant 0,$$

并且在 $g(A)^*g(A)>0$ 时,必有

$$(1-\|h(A)\|^2)g(A)^*g(A)>0.$$

以此结合(3.2.3)式得出(3.2.1)式. 显然,其严格不等式成立,只有 $g(A)^*g(A)>0$ 且 h 不是绝对值为 1 的常数.

不等式(3.2.2)实际上是(3.2.1)式的推论. 事实上,

$$(g(A)^*g(A)x,x)\geqslant(f(A)^*f(A)x,x),$$

即

$$(g(A)x,g(A)x)\geqslant(f(A)x,f(A)x),$$

此即

$$\|g(A)x\|^2\geqslant\|f(A)x\|^2,$$

得

$$\|g(A)x\|\geqslant\|f(A)x\|,$$

从而

$$\sup_{\|x\|\leqslant 1}\|g(A)x\|\geqslant\sup_{\|x\|\leqslant 1}\|f(A)x\|,$$

因此,

$$\|g(A)\|\geqslant\|f(A)\|.$$

然而,由

$$\|f(A)\|=\|h(A)g(A)\|\leqslant\|h(A)\|\ \|g(A)\|$$

以及 $\|h(A)\|<1$,不但得出(3.2.2)式,而且得出当 $g(A)\neq 0$ 时,$\|f(A)\|<\|g(A)\|$. ∎

基本定理(定理 3.1.1)可作为定理 3.2.1 在 g 为常数 1 时的特殊情形,并且定理 3.2.1 的强度从下面四个推论可看更为明显.

推论 3.2.1　设 A 是 Hilbert 空间 H 上的真压缩算子. 又设 $f\in B(\Delta)$, $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 是 f 在 Δ 内的某些零点(不必全是零点),且每一个重复的次数不超过它的重数. 令

$$g(z)=\prod_{k=1}^{n}\frac{z-z_k}{1-\bar{z}_k z}. \qquad (3.2.4)$$

则(3.2.1)和(3.2.2)式成立，(3.2.1)式中的严格不等号出现当且仅当 $g(A)^*g(A)>0$ 且 f 不满足 $f(z)=\eta g(z)$，其中 $|\eta|=1$. (3.2.2)式中等式成立当且仅当 $g(A)=0$ 或 $f(z)=\eta g(z)$，其中 $|\eta|=1$.

证明 令 $h(z)=f(z)/g(z)$，则 $h\in H(\Delta)$. 因对于 $|z|=1$，$|(z-z_k)/(1-\bar{z}_k z)|=1$，所以我们有 $|g(z)|=1(|z|=1)$. 对于任意 ε：$0<\varepsilon<1$，则可选取 $\delta>0$ 使得当 $1-\delta<|z|\leqslant 1$ 时，$|g(z)|\geqslant 1-\varepsilon$. 于是

$$1>|f(z)|=|g(z)h(z)|\geqslant(1-\varepsilon)|h(z)|,$$

其中 $1-\delta<|z|\leqslant 1$. 而由复值最大模原理，$|h(z)|<\frac{1}{1-\varepsilon}(z\in\Delta)$. 因此，在 Δ 上，$|h(z)|\leqslant 1$. 故结论为定理 3.2.1 的特殊情形.

∎

推论 3.2.2 设 A 为 Hilbert 空间 H 上的真压缩算子. 令 $f\in B(\Delta)$，并且对某一整数 $n\geqslant 1$，$f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(n-1)}(0)=0$. 则

$$A^{n*}A^n\geqslant f(A)^*f(A). \qquad (3.2.5)$$

$$\|A^n\|\geqslant\|f(A)\|. \qquad (3.2.6)$$

(3.2.5)式的严格不等式成立当且仅当 $A^{n*}A^n>0$ 且 $f(z)\neq\eta z^n$，其中 η 为 $|\eta|=1$ 的某一常数. (3.2.6)式等号成立当且仅当 $A^n=0$ 或 $f(z)\equiv\eta z^n$，其中 $|\eta|=1$.

推论 3.2.2 将在后面关于算子的 Pick 定理. Vitali 收敛定理以及附属原理等定理的证明中用到. 首先，我们利用此推论导出关于算子的 Harnack 双不等式.

推论 3.2.3 设 A 为 Hilbert 空间 H 上的真压缩算子. 设 $g(z)\in P(\Delta)$ 且具有

$$g(0)=1, g'(0)=\cdots=g^{(n-1)}(0)=0,$$

其中 $n\geqslant 2$ 为整数．则

$$(I+g(A)^*)A^{n^*}A^n(I+g(A))\geqslant(I-g(A)^*)(I-g(A)),\tag{3.2.7}$$

$$\frac{1-\|A^n\|}{1+\|A^n\|}\leqslant\|g(A)\|\leqslant\frac{1+\|A^n\|}{1-\|A^n\|}.\tag{3.2.8}$$

(3.2.7)式存在严格不等式当且仅当 $A^{n^*}A^n>0$ 且 $g(z)\neq(1+\eta z^n)(1-\eta z^n)^{-1}$，其中 η 为 $|\eta|=1$ 的常数．

证明 令 $f(z)=\dfrac{g(z)-1}{g(z)+1}$. 则 f 满足推论 3.2.2 的假设条件，并且

$$f(A)=(g(A)-I)(g(A)+I)^{-1}.$$

因此，(3.2.7)式以及严格不等式的条件可依推论 3.2.2 得出．

(3.2.7)式蕴含

$$\|I-g(A)\|\leqslant\|A^n(I+g(A))\|.$$

事实上，令

$$T=A^n(I+g(A)),U=I-g(A).$$

则(3.2.7)式可写为

$$T^*T\geqslant U^*U,$$

此即

$$((T^*T-U^*U)x,x)\geqslant 0,x\in H,$$

或者

$$(T^*Tx,x)\geqslant(U^*Ux,x).$$

因而 $(Tx,Tx)\geqslant(Ux,Ux)$，此即 $\|Tx\|^2\geqslant\|Ux\|^2$. 或 $\|T\|\geqslant\|U\|$．故

$$\|I-g(A)\|\leqslant\|A^n(I+g(A))\|,$$

于是

$$\|g(A)\|-1\leqslant\|I-g(A)\|\leqslant\|A^n\|(1+\|g(A)\|),$$

由此推出

$$\|g(A)\|\leqslant\frac{1+\|A^n\|}{1-\|A^n\|},$$

此即(3.2.8)式的第二个不等式．令 $h(z)=\frac{1}{g(z)}$．则 $h(z)$ 与 $g(z)$ 具有相同的性质，即 $h(z)\in P(\Delta)$，

$h(0)=1$，

$h'(0)=\cdots=h^{(n-1)}(0)=0 \qquad (n\geqslant 2)$．

因此，将(3.2.8)式的第二个不等式应用于 h，我们有

$$\|g(A)\|^{-1}\leqslant\|h(A)\|\leqslant\frac{1+\|A^n\|}{1-\|A^n\|}.$$

故

$$\|g(A)\|\geqslant\frac{1-\|A^n\|}{1+\|A^n\|}.$$

此即(3.2.8)式的第一个不等式．定理证毕． ▌

依推论 3.2.3 可推出下面相应于 Carathéodory 不等式的算子形式．

推论 3.2.4 设 A 为 Hilbert 空间 H 上的真压缩算子．设 $h\in H(\Delta)$，$h(0)=h'(0)=\cdots=h^{(n-1)}(0)=0(n\geqslant 1)$，并且对于 $z\in\Delta$，$\mathrm{Re}h(z)<1$．则

$$\|h(A)\|\leqslant\frac{2\|A^n\|}{1-\|A^n\|}. \tag{3.2.9}$$

证明 令 $g(z)=1-h(z)$．应用推论 3.2.3 于 $g(z)$，则由(3.2.7)式，我们有

$$\begin{aligned}\|h(A)\|=\|I-g(A)\|&\leqslant\|A^n(I+g(A))\|\\&\leqslant\|2I-h(A)\|\,\|A^n\|\leqslant\|A^n\|(2+\|h(A)\|).\end{aligned}$$

于是，由上不等式得(3.2.9)式． ▌

下面的定理 3.2.2 是经典的 Pick 定理的算子类比，即推论 3.2.2 在 $n=1$ 时的推广．

定理 3.2.2(樊壜) 设 A 为 Hilbert 空间 H 上的真压缩算子．令 $f\in B(\Delta)$，$z_0\in\Delta$．则

$$\begin{aligned}&(I-z_0A^*)^{-1}(A^*-\bar{z}_0I)(A-z_0I)(I-\bar{z}_0A)^{-1}\\&\quad\geqslant\{I-f(z_0)f(A)^*\}^{-1}\{f(A)^*-\overline{f(z_0)}I\}\end{aligned} \tag{3.2.10}$$

$$\cdot \{f(A)-f(z_0)I\}\{I-\overline{f(z_0)}f(A)\}^{-1},$$

$$\|(A-z_0I)(I-\bar{z}_0A)^{-1}\|$$

$$\geqslant \|\{f(A)-f(z_0)I\}\{I-\overline{f(z_0)}f(A)\}^{-1}\|. \tag{3.2.11}$$

(3.2.10)式的严格不等式成立当且仅当

$$(A^*-\bar{z}_0I)(A-z_0I)>0$$

且 f 不是形如

$$f(z)=\varepsilon\frac{z-z_1}{1-\bar{z}_1z},|\varepsilon|=1,|z_1|<1, \tag{3.2.12}$$

的函数. (3.2.11)式的等式成立当且仅当 $A=z_0I$，或 f 是形如(3.2.12)的函数.

证明 对于 $w\in\Delta$，令 $\mu_w\in B(\Delta)$ 为 Möbius 变换：

$$\mu_w(z)=\frac{z-w}{1-\bar{w}z}. \tag{3.2.13}$$

由于 $f\in B(\Delta)$，$z_0\in\Delta$，则必有复合函数

$$g=\mu_{f(z_0)}\circ f\circ\mu_{-z_0}\in B_0(\Delta). \tag{3.2.14}$$

令 $C=\mu_{z_0}(A)=(A-z_0I)(I-\bar{z}_0A)^{-1}$. 因为 $\|A\|<1$ 以及 $\mu_{z_0}\in B(\Delta)$，于是，由基本定理，$\|C\|<1$. 由于 $g\in B_0(\Delta)$，则依推论 3.2.2，我们有

$$C^*C\geqslant g(C)^*g(C), \tag{3.2.15}$$

$$\|C\|\geqslant\|g(C)\|. \tag{3.2.16}$$

因为 μ_{-z_0} 为 μ_{z_0} 的逆函数，则

$$\mu_{-z_0}(C)=A,$$

$$g(C)=\mu_{f(z_0)}(f(A))=\{f(A)-f(z_0)I\}\{I-\overline{f(z_0)}f(A)\}^{-1}.$$

故(3.2.15)，(3.2.16)式分别为(3.2.10)和(3.2.11)式. 由推论 3.2.2，(3.2.15)式中的"$\geqslant$"为"$>$"当且仅当 $C^*C>0$ 且 g 不为 ηz ($|\eta|=1$). (3.2.16)式中"$\geqslant$"为"$>$"当且仅当 $C=0$ 或 $g(z)=\eta z$ ($|\eta|=1$). 但 $C^*C>0$ 等价于 $(A^*-\bar{z}_0I)(A-z_0I)>0$；$C=0$ 等价于 $A=z_0I$. 现剩下来要证：$g(z)=\eta z$ ($|\eta|=1$) 的充要条件是 f

之形为

$$f(z)=\varepsilon\frac{z-z_1}{1-\bar{z}_1 z}, |\varepsilon|=1, z_1\in\Delta.$$

此可直接计算得到．定理得证． ▌

利用推论 3.2.2 以及 Lindelöf 关于 Vitali 定理的证明方法，可以证明下面定理．

定理 3.2.3(樊𰶰)　设$\{f_n\}$为 $H(\Delta)$内的函数序列，并且在Δ上一致有界．设$\{A_n\}$为一可逆的真压缩算子序列且$\lim_{n\to\infty}\|A_n\|=0$．若对于每一$k$，$\lim_{n\to\infty}f_n(A_k)$存在(依范数拓扑)，则必有一$f\in H(\Delta)$使得在$\Delta$内任一紧子集上一致有

$$\lim_{n\to\infty}f_n(z)=f(z).$$

证明　设$f_n(z)=\sum_{j=0}^{\infty}a_{nj}z^j$为$f_n(z)$的 Taylor 级数．令$M>0$使得对所有的$n$及$z\in\Delta$，有$|f_n(z)|\leqslant M$．由 Cauchy 积分公式，对于任意的$n,j$

$$|a_{n_j}|\leqslant M.$$

因为对任意$z\in\Delta$，有

$$|f_n(z)-f_n(0)|\leqslant 2M,$$

则由推论 3.2.2，对任意的n,k，

$$\|f_n(A_k)-a_{n_0}I\|\leqslant 2M\|A_k\|.$$

于是

$$\begin{aligned}|a_{n_0}-a_{m_0}|&=\|a_{n_0}I-a_{m_0}I\|\\&\leqslant\|a_{n_0}I-f_n(A_k)\|+\|f_n(A_k)-f_m(A_k)\|\\&\quad+\|f_m(A_k)-a_{m_0}I\|\\&\leqslant 4M\|A_k\|+\|f_n(A_k)-f_m(A_k)\|.\end{aligned}$$

由于$\lim_{k\to\infty}\|A_k\|=0$且$\lim_{n\to\infty}f_n(A_k)$对每一$k$均成立．故$\lim_{n_0\to\infty}a_{n_0}=a_0$．对于$p=0,1,2,\cdots,n=1,2,\cdots$，令

$$f_{n_p}(z)=\sum_{j=p}^{\infty}a_{n_j}z^{j-p}. \tag{3.2.17}$$

则 $f_{n_p}\in H(\Delta)$，并且

$$f_{n_p}(z)=a_{n_p}+zf_{n_{p+1}}(z), \tag{3.2.18}$$

$$f_{n_p}(A_k)=a_{n_p}I+A_kf_{n_{p+1}}(A_k). \tag{3.2.19}$$

现在要证明下面(3.2.20)—(3.2.23)各关系式关于 $p=0,1,2,\cdots$，都成立：

$$\lim_{n\to\infty}f_{n_p}(A_k)\text{对一切 }k\text{ 均存在；} \tag{3.2.20}$$

$$|f_{n_p}(z)|\leqslant(p+1)M;\forall\ z\in\Delta,\forall\ n; \tag{3.2.21}$$

$$\| f_{n_p}(A_k)-a_{n_p}I\|\leqslant(p+2)M\| A_k\|,\forall\ k; \tag{3.2.22}$$

$$\lim_{n\to\infty}a_{n_p}=a_p\text{ 存在}. \tag{3.2.23}$$

因为 $f_{n_0}=f_n$，对于 $p=0$，(3.2.20)—(3.2.23)各关系成立．现假设对于 $p=q$，(3,2,20)—(3.2.23)各关系成立．由(3.2.19)式和关系(3.2.20)与(3.2.23)，$\lim\limits_{n\to\infty}A_kf_{n_{q+1}}(A_k)$存在且 A_k 可逆，于是关系式(3.2.20)在 $p=q+1$ 时亦成立．由假设关系式(3.2.21)在 $p=q$ 时成立，并且$|a_{n_q}|\leqslant M$，对于所有 $z\in\Delta$，我们有

$$|f_{n_q}(z)-a_{n_q}|\leqslant(q+2)M.$$

于是，由经典的 Schwarz 引理和(3.2.18)式，

$$|zf_{n_{q+1}}(z)|=|f_{n_q}(z)-a_{n_q}|\leqslant(q+2)M|z|,z\in\Delta,$$

此即关系式(3.2.22)在 $p=q+1$ 时亦成立．因此，对于 $z\in\Delta$，有

$$|f_{n_{q+1}}(z)-a_{n_{q+1}}|\leqslant(q+3)M.$$

从而，由推论 3.2.2 证明了关系式(3.2.22)，并且

$$\begin{aligned}|a_{n_{q+1}}-a_{m_{q+1}}|&\leqslant\| a_{n_{q+1}}I-f_{n_{q+1}}(A_k)\|\\&+\| f_{n_{q+1}}(A_k)-f_{m_{q+1}}(A_k)\|+\| f_{m_{q+1}}(A_k)-a_{m_{q+1}}I\|\\&\leqslant2(q+3)M\| A_k\|+\| f_{n_{q+1}}(A_k)-f_{m_{q+1}}(A_k)\|.\end{aligned}$$

由 $\lim\limits_{k\to\infty}\| A_k\|=0$ 以及 $p=q+1$ 时的关系式(3.2.20)，得到当 $p=q+1$ 时的关系式(3.2.23)．因此，根据归纳假设，对所有 p 关系

式(3.2.20)—(3.2.23)均成立.

令 $f(z)=\sum\limits_{p=0}^{\infty}a_p z^p$. 则 $f\in H(\Delta)$,其中 $|a_p|\leqslant M(p=0,1,2,\cdots)$. 对于 $|z|\leqslant r<1$,我们有

$$
\begin{aligned}
|f_n(z)-f(z)| &\leqslant \sum_{p=0}^{m-1}|a_{n_p}-a_p|\cdot|z|^p \\
&\quad+\sum_{p=m}^{\infty}(|a_{n_p}|+|a_p|)|z|^p \\
&\leqslant \sum_{p=0}^{m-1}|a_{n_p}-a_p|+2M\frac{r^m}{1-r}.
\end{aligned}
$$

于是,由上不等式以及关系式(3.2.23),可推出在 $|z|\leqslant r$ 上一致有

$$\lim_{n\to\infty}f_n(z)=f(z).$$

定理获证. ∎

利用定理 3.2.3 可得到下面的全等定理.

定理 3.2.4(樊畿)　设 $f,g\in H(\Delta)$. 如果存在 Hilbert 空间 H 上的一可逆真压缩算子序列 $\{A_k\}$ 使得对每个 k,都有

$$\lim_{k\to\infty}\|A_k\|=0 \text{ 且 } f(A_k)=g(A_k),$$

则 $f=g$.

证明　(i)若 f,g 在 Δ 上均为有界,应用定理 3.2.3 于序列

$$f,g,f,g\cdots.$$

此序列为 Δ 上一致有界的. $\{A_k\}$ 为一可逆真压缩算子序列,并且 $\lim\limits_{k\to\infty}\|A_k\|=0$, $f(A_k)=g(A_k)$. 则序列

$$f(A_k),g(A_k),\cdots$$

收敛(依范数拓扑). 依定理 3.2.4,存在 $F\in H(\Delta)$,使得

$$\lim_{n\to\infty}f(z)=f(z)=F(z),$$

$$\lim_{n\to\infty}g(z)=g(z)=F(z).$$

故 $f(z)\equiv g(z)\equiv F(z)(z\in\Delta)$. 此即 $f=g$.

(ii)若 f,g 二者在 Δ 上不都是有界的. 考虑

$$\varphi(z)=f(rz),\psi(z)=g(rz),0\leqslant r<1.$$

则 φ,ψ 在 Δ 上均为有界. 由 $f(A_k)=g(A_k)$，则

$$\varphi(r^{-1}A_k)=\psi(r^{-1}A_k).$$

于是，依已证明的(i)，有 $\varphi=\psi$. 即

$$f(rz)=g(rz),0\leqslant r<1,z\in\Delta.$$

故 $f=g$. 综合(i)及(ii)定理获证. ▌

例3.2.1 设 $A\neq 0$ 为 H 上的幂零算子，即存在某一正整数 $n\geqslant 2$，使得 $A^n=0$. 令 $f,g\in H(\Delta)$ 使 $f(z)-g(z)=cz^n$，其中 $c\neq 0$ 为常数. 则对于所有 $k>\|A\|$，$f(A_k)=g(A_k)$，其中 $A_k=k^{-1}A$，并且 $\lim\limits_{k\to\infty}\|A_k\|=0$. 但 $f\neq g$. 因此，A_k 不可逆.

设 $g\in H(\Delta)$ 为 Δ 上的单叶函数且 $g(0)=0$. 设 $f\in H(\Delta)$，$f(0)=0$ 且 $f(\Delta)\subseteq g(\Delta)$. 则必存在 $h\in B_0(\Delta)$ 使得

$$f(z)=g(h(z)).$$

这就是 Hille 的从属原则. 依此原则及推论 3.2.2 可以得出下面具有一系列应用的定理.

定理 3.2.5(樊壚) 设 $g\in H(\Delta)$ 为 Δ 上的单叶函数且 $g(0)=0$. 设 $f\in H(\Delta)$，$f(0)=0$ 且 $f(\Delta)\subseteq g(\Delta)$. 则对 Hilbert 空间 H 上的每一真压缩算子 A，存在 H 上的唯一真压缩算子 B 满足

(i) $f(A)=f(B)$；

(ii) $A^*A\geqslant B^*B$，$\|A\|\geqslant\|B\|$；

(iii) $A^*A>B^*B$ 当且仅当 $A^*A>0$，$f(z)\not\equiv g(\eta z)$，$|\eta|=1$，η 为常数；

(iv) $\|A\|=\|B\|$ 当且仅当 $A=0$ 或 f 形如 $g(\eta z)$，$|\eta|=1$.

证明 根据 Hille 的从属原则，存在 $h\in B_0(\Delta)$ 使得

$$f(z)=g(h(z)),z\in\Delta.$$

令 $B=h(A)$. 则

$$f(A)=g(h(A))=g(B).$$

此即(i). 由推论 3.2.3，我们有

$$A^*A\geqslant h(A)^*h(A),\|A\|\geqslant\|h(A)\|,$$

即得

$$A^*A \geqslant B^*B, \| A \| \geqslant \| B \|.$$

此即(ii).(iii)和(iv)显然．最后要证明满足(i)的算子的唯一性．令 $\varphi = g^{-1}$. 则 $\varphi(z)$ 为 $g(\Delta)$ 上的解析函数．于是，由谱映射定理(性质 2.2.3)，我们有

$$\sigma(g(B)) = g(\sigma(B)) \subseteq g(\Delta).$$

从而

$$B = \varphi \circ g(B) = \varphi(g(B)).$$

故由(i)确定的 B 是唯一的．定理证毕． ▌

若 $g(z)=z$，则定理 3.2.4 是推论 3.2.2 在 $n=1$ 时的特殊情形．此定理的另一特例为下面关于 Koebe-Bieberbach $\frac{1}{4}$-定理(关于单叶函数)的推广．

推论 3.2.5　设 $g \in H(\Delta)$ 为 Δ 上的单叶函数，且 $g(0)=0$，$g'(0)=1$. 设对于 Hilbert 空间 H 的每一具有性质 $\| C \| < \frac{1}{4}$ 的算子 C，存在唯一的真压缩算子 B(H 上的)使得

$$g(B) = C;$$

$$16C^*C \geqslant B^*B;$$

并且当 $C^*C > 0$ 时，$16C^*C > B^*B$；除 $C=0$ 外，$\| B \| < 4 \| C \|$ ．

证明　令 $f(z) = \frac{z}{4}$. 经典的$\frac{1}{4}$-定理给出

$$\frac{1}{4}\Delta \subseteq g(\Delta).$$

此即

$$f(\Delta) \subseteq g(\Delta).$$

应用定理 3.2.6 于 $A=4C$，则有唯一的真压缩算子 B 使得

$$g(B) = f(A) = C.$$

由(i)，(ii)，(iii)可得出其他的判断．只须观察 $f(z) = \frac{z}{4}$，$f(z) = g(\eta z)$，$|\eta| = 1$ 为不可能．事实上，若$\frac{z}{4} = g(\eta z)$，则$\frac{1}{4} = \eta g'(0)$.

然而，$|\eta|=1, g'(0)=1$. 矛盾. 从而推论得证. ▮

当单叶函数 g 为凸函数时，即当 $g(\Delta)$ 为凸集时，$\frac{1}{4}$-定理变为 $\frac{1}{2}$-定理. 因此，推论 3.2.5 中 $\frac{1}{4}$，16，4 分别精细化为 $\frac{1}{2}$，4，2.

推论 3.2.6 设 $g\in H(\Delta)$ 为 Δ 上的单叶函数，并且 $g(0)=0$，$g'(0)=1$. 若 g 为星形的（即 $g(\Delta)$ 为对原点 0 的星形集），则当 A 沿一切真压缩算子区域上变动时，$g(A)$ 之集 $\{g(A)\}$ 为算子的星形集. 更精确地说，对于 H 上的每一真压缩算子 A 及非负实数 $r<1$，存在 H 上的真压缩算子 B 使得 $g(B)=rg(A)$，$A^*A\geqslant B^*B$ 并且当 $A^*A>0$ 时，$A^*A>B^*B$；除 $A=0$ 外，$\|A\|>\|B\|$.

证明 令 $f(z)=rg(z)\,(0\leqslant r<1)$. 因为 g 是星形的，且

$$f(\Delta)=rg(\Delta)\subseteq g(\Delta).$$

所以结论由定理 3.2.5 立即得到. 只须考察 $f(z)=g(\eta z)$，$|\eta|=1$ 为不可能. 事实上，若 $rg(z)=g(\eta z)$，则 $rg'(0)=\eta g'(0)$，矛盾. 推论得证. ▮

例 3.2.2 考虑函数

$$g(z)=\frac{4}{\pi}\tan^{-1}z=\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{2n+1}.$$

g 为 Δ 上的单叶解析函数，并且 $g(\Delta)$ 为 $|\mathrm{Re}\,w|<1$ 的带状域. 令 $f\in H(\Delta)$，$f(0)=0$ 且 $|\mathrm{Re}f(z)|<1\,(z\in\Delta)$. 则由定理 3.2.5，对于 H 上的每一真压缩算子 A，存在唯一的压缩算子 B 使得

$$f(A)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{B^{2n+1}}{2n+1},$$

此级数依范数拓扑收敛. 由于 $\|B\|\leqslant\|A\|$，则应有

$$\|f(A)\|\leqslant\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\|B\|^{2n+1}}{2n+1}\leqslant\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\|A\|^{2n+1}}{2n+1},$$

即

$$\|f(A)\|\leqslant\frac{2}{\pi}\log\frac{1+\|A\|}{1-\|A\|}.$$

最后一不等式亦可由定理3.1.3(最大模原理)及$|f(z)|\leqslant\frac{2}{\pi}\log\frac{1+|z|}{1-|z|}$ $(z\in\Delta)$得出．事实上，$M(r)=\max\limits_{|z|=r}|f(z)|=\max\limits_{\|A\|\leqslant r}\|f(A)\|$ $(0\leqslant r<1)$，因此，

$$\|f(A)\|\leqslant\max_{\|A'\|\leqslant\|A\|}\|f(A')\|\leqslant\max_{|z|\leqslant\|A\|}|f(z)|$$
$$\leqslant\frac{2}{\pi}\log\frac{1+\|A\|}{1-\|A\|}.$$

例3.2.3 设$f\in H(\Delta)$，$f(0)=0$. 设有单叶函数$g\in H(\Delta)$且$g(0)=0$，$g'(0)=1$使得$f(\Delta)\subseteq g(\Delta)$. 则由定理3.2.5，对于Hilbert空间$H$上的每个真压缩算子$A$，存在一个真压缩算子$B$使得$f(A)=g(B)$. 因为

$$|g(z)|\leqslant\frac{|z|}{(1-|z|)^2},$$

所以

$$\|g(B)\|\leqslant\frac{\|B\|}{(1-\|B\|)^2}.$$

又由于$\|B\|\leqslant\|A\|$，则有

$$\|f(A)\|\leqslant\frac{\|A\|}{(1-\|A\|)^2}.$$

§3.3

算子函数的Julia引理

这一节旨在将经典的Julia引理[50]推广到算子的情形．为此我们首先给出以下几个辅助引理．

引理3.3.1 设A、B为Hilbert空间H上的有界线性算子，B为可逆算子．则对任一正数ρ，$\|AB^{-1}\|<\rho$当且仅当$A^*A<\rho^2B^*B$.

证明 这是明显的，因为$\|AB^{-1}\|<\rho$等价于$B^{*-1}A^*AB^{-1}$

$<\rho^2 I$，即 $A^*A<\rho^2 B^*B$. ▌

引理 3.3.2　设 A,B 为 Hilbert 空间上的有界线性算子，并且 $\|AB^{-1}\|<1$. 设 z 是一复数且 $|z|<1$，$0<\rho<1$. 则不等式

$$\|(A-zB)(B-\bar{z}A)^{-1}\|<\rho \tag{3.3.1}$$

等价于

$$(B^*-zA^*)(B-\bar{z}A)<\frac{1-|z|^2}{1-\rho^2}(B^*B-A^*A). \tag{3.3.2}$$

证明　首先，由于 $\|\bar{z}AB^{-1}\|<1$ 且 $I-\bar{z}AB^{-1}$ 是可逆的，则

$$B-\bar{z}A=(I-\bar{z}AB^{-1})B$$

也是可逆的. 由引理 3.3.1 可知，(3.3.1)式等价于

$$(A^*-\bar{z}B^*)(A-zB)<\rho^2(B^*-zA^*)(B-\bar{z}A).$$

此不等式可写成

$$(1-\rho^2)(B^*-zA^*)(B-\bar{z}A)$$
$$<(B^*-zA^*)(B-\bar{z}A)-(A^*-\bar{z}B^*)(A-zB).$$

又由于

$$(B^*-zA^*)(B-\bar{z}A)=B^*B-\bar{z}B^*A-zA^*B+|z|^2A^*A,$$
$$(A^*-\bar{z}B^*)(A-zB)=A^*A-zA^*B-\bar{z}B^*A+|z|^2B^*B,$$

两式对应相减得到：

$$(1-\rho^2)(B^*-zA^*)(B-\bar{z}A)<(1-|z|^2)(B^*B-A^*A).$$

从而

$$(B^*-zA^*)(B-\bar{z}A)<\frac{1-|z|^2}{1-\rho^2}(B^*B-A^*A).$$

故(3.3.2)式成立. 引理证毕. ▌

引理 3.3.3　设 A,B 为 Hilbert 空间 H 上的有界线性算子，并且 $A^*A<B^*B$. 设 β 为正数，则不等式

$$\|(B-A)(B^*B-A^*A)^{-1}(B^*-A^*)\|<\beta \tag{3.3.3}$$

与不等式

$$(B^*-A^*)(B-A)<\beta(B^*B-A^*A) \tag{3.3.4}$$

等价. 当 B 为可逆算子时，它们等价于

$$\left\|AB^{-1}-\frac{1}{1+\beta}I\right\|<\frac{\beta}{1+\beta}. \tag{3.3.5}$$

证明 由于 $A^*A<B^*B$,并且两端均为 Hermite 算子,则有

$$B^*B-A^*A>0.$$

从而 $(B^*B-A^*A)^{-1}$ 存在且唯一. 令

$$C=(B-A)(B^*B-A^*A)^{-\frac{1}{2}}.$$

应用恒等式 $\|C\|^2=\|CC^*\|$,我们有

$$\|(B-A)(B^*B-A^*A)^{-\frac{1}{2}}\|^2<\beta.$$

于是,(3.3.3)式可写为

$$\|(B-A)(B^*B-A^*A)^{-\frac{1}{2}}\|<\beta^{\frac{1}{2}}. \tag{3.3.6}$$

由引理 3.3.1,不等式(3.3.6)等价于不等式(3.3.4). 将不等式(3.3.4)展开为

$$A^*A-\frac{B^*A}{1+\beta}-\frac{A^*B}{1+\beta}+\frac{B^*B}{1+\beta}<\frac{\beta}{1+\beta}B^*B. \tag{3.3.7}$$

应用等式

$$\frac{\beta}{1+\beta}-\frac{1}{1+\beta}=\frac{\beta^2-1}{(1+\beta)^2},$$

则(3.3.7)式等价于

$$A^*A-\frac{B^*A}{1+\beta}-\frac{A^*B}{1+\beta}+\frac{B^*B}{(1+\beta)^2}<\frac{\beta^2}{(1+\beta)^2}B^*B,$$

即为

$$\left(A^*-\frac{B^*}{1+\beta}\right)\left(A-\frac{B}{1+\beta}\right)<\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^2B^*B.$$

若 B 为可逆算子,则以 B^{-1} 右乘上式两端,B^{*-1} 左乘上式两端得

$$\left(B^{*-1}A^*-\frac{1}{1+\beta}I\right)\left(AB^{-1}-\frac{1}{1+\beta}I\right)<\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^2.$$

故不等式(3.3.5)成立. 引理得证. ∎

有一个关于一个复变量的矩阵值解析函数的 Julia 引理是由 Potapov 给出的[101],并且 Glicksberg 获得了关于函数代数的 Julia 引理[61]. 下面我们将给出由樊壕证明的关于算子的 Julia

引理[50].

定理 3.3.1 设 f 是 Δ 上的复值解析函数，并且对于 $z\in\Delta$，$|f(z)|<1$. 设 $\{z_n\}\subseteq\Delta$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}z_n=1,\lim_{n\to\infty}f(z_n)=1, \tag{3.3.8}$$

并且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-|f(z_n)|}{1-|z_n|}=\alpha, \tag{3.3.9}$$

其中 α 是有限数. 设 A 为 Hilbert 空间 H 上的真压缩算子. 则我们有

(i) $$\|(I-f(A))\{I-f(A)^*f(A)\}^{-1}(I-f(A)^*)\|$$
$$\leqslant\alpha\|(I-A)(I-A^*A)^{-1}(I-A^*)\|. \tag{3.3.10}$$

(ii) 如果 β 为正数，并且

$$(I-A^*)(I-A)<\beta(I-A^*A), \tag{3.3.11}$$

则有

$$(I-f(A)^*)(I-f(A))<\alpha\beta(I-f(A)^*f(A)). \tag{3.3.12}$$

(iii) 如果 β 为正数，并且

$$\left\|A-\frac{1}{1+\beta}I\right\|<\frac{\beta}{1+\beta}, \tag{3.3.13}$$

则有

$$\left\|f(A)-\frac{1}{1+\beta}I\right\|<\frac{\alpha\beta}{1+\alpha\beta}. \tag{3.3.14}$$

证明 设 f，$\{z_n\}$ 及 A 满足假设条件. 首先注意 $\|A\|<1$ 等价于 $A^*A<I$，从而 $I-A^*A$ 可逆. 由基本定理，$\|f(A)\|<1$，即 $f(A)^*f(A)<I$. 因此，$I-f(A)^*f(A)$ 也可逆. 取正数 β 使得

$$\|(I-A)(I-A^*A)^{-1}(I-A^*)\|<\beta. \tag{3.3.15}$$

因 $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=1$，则可选出 $\{\rho_n\}$ 使得

$$0<\rho_n<1,\lim_{n\to\infty}\rho_n=1,\lim_{n\to\infty}\frac{1-|z_n|}{1-\rho_n}=\beta.$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-|z_n|^2}{1-\rho_n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+|z_n|}{1+\rho_n}\cdot\frac{1-|z_n|}{1-\rho_n}=\beta,$$

并且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-|f(z_n)|^2}{1-\rho_n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+|f(z_n)|}{1+\rho_n}\cdot\frac{1-|f(z_n)|}{1-\rho_n}=\alpha\beta.$$

由引理 3.3.3,(3.3.15)式等价于(3.3.11)式. 则存在一正整数 m 使得对于 $n\geqslant m$,我们有

$$(I-z_nA^*)(I-\bar{z}_nA)<\frac{1-|z_n|^2}{1-\rho_n^2}(I-A^*A).$$

于是,就 $B=I$ 及 $\|A\|<1$,应用引理 3.3.2,对于 $n\geqslant m$,我们有

$$\|(A-z_nI)(I-\bar{z}_nA)^{-1}\|<\rho_n.$$

另一方面,由算子化的 Pick 定理(定理 3.2.3),我们有

$$\|(f(A)-f(z_n)I)(I-\overline{f(z_n)}f(A))^{-1}\|$$
$$\leqslant\|(A-z_nI)(I-\bar{z}_nA)^{-1}\|.$$

因此,对于 $n\geqslant m$,我们有

$$\|\{f(A)-f(z_n)I\}\{I-\overline{f(z_n)}f(A)\}^{-1}\|<\rho_n.$$

再一次应用引理 3.3.2 得

$$\{I-f(z_n)f(A)^*\}\{I-\overline{f(z_n)}f(A)\}$$
$$<\frac{1-|f(z_n)|^2}{1-\rho_n^2}\{I-f(A)^*f(A)\},\forall\ n\geqslant m.$$

令 $n\to+\infty$,我们得

$$[I-f(A)^*][I-f(A)]\leqslant\alpha\beta[I-f(A)^*f(A)].$$

据此,再由引理 3.3.3,可得

$$\|\{I-f(A)\}\{I-f(A)^*f(A)\}^{-1}\{I-f(A)^*\}\|<\alpha\beta. \tag{3.3.16}$$

[若(3.3.3),(3.3.4)和(3.3.5)中的"<"换为"≤",引理 3.3.3 仍然成立.]因此,我们证明了对于任意 $\beta>0$,不等式(3.3.15)意味着(3.3.16). 这就证明了(i),即取 β 为 $\|(I-A)(I-A^*A)^{-1}(I-A^*)\|$.

在(3.3.10)式中，令 $A=0$，则由 $\|f(0)\|<1$，我们有

$$\alpha\geqslant\|(I-f(0))(I-f(0)^*f(0))^{-1}(I-f(0)^*)\|>0.$$

于是，由 $\alpha>0$ 及(3.3.10)，则(3.3.15)式意味着严格不等式：

$$\|(I-f(A))(I-f(A)^*f(A))^{-1}(I-f(A)^*)\|<\alpha\beta.$$

最后，为了完成证明只需再一次应用引理 3.3.3 得到(ii)和(iii)．定理证毕．∎

§ 3.4

Pick-Julia 定理的进一步算子化

在前几节中，我们介绍了樊𰻞的关于算子解析函数的一些重要结果，其中包括算子的 Pick 定理和 Julia 引理．这一节我们将进一步讨论关于算子的 Pick-Julia 定理和 Julia 引理的一个改进．为了简化叙述，我们将引用下面一些符号：

$$\Delta=\{z;|z|<1\},\Pi=\{z;\mathrm{Re}z>0\}$$

分别表示复平面上的开单位圆和右半平面．φ 和 ψ 分别表示下面两个特殊函数：

$$\varphi(z)=\frac{1+z}{1-z},z\in\Delta,\tag{3.4.1}$$

$$\psi(z)=\frac{z-1}{z+1},z\in\Pi.\tag{3.4.2}$$

显然，φ 和 ψ 互为逆函数，并且

$$\varphi(\Delta)=\Pi,\psi(\Pi)=\Delta.$$

$H(\Delta,\Delta)$表示在 Δ 内解析且 $f(\Delta)\subseteq\Delta$ 的复值函数族．$H(\Delta,\Pi)$表示在 Δ 内解析且取值于 Π 内的函数族．$H(\Pi,\Delta)$表示在 Π 内解析且取值于 Δ 内的函数族．$H(\Pi,\Pi)$表示在 Π 内解析取值于 Π 内的函数族．

设 H 为 Hilbert 空间，Δ_H 为 H 上的所有真压缩算子构成的集合，即 H 上的所有算子 A 使其 A 可逆且 $\|A\|<1$；Π_H 为 H 上所有使得 $\mathrm{Re}A>0$ 的算子 A 构成的集合．因此，我们有

(i)若 $f(z)\in H(\Delta,\Delta)$，$A\in\Delta_H$，则 $f(A)\in\Delta_H$；

(ii)若 $g(z)\in H(\Delta,\Pi)$，$A\in\Delta_H$，则 $g(A)\in\Pi_H$；

(iii)若 $h(z)\in H(\Pi,\Delta)$，$k(z)\in H(\Pi,\Pi)$，$A\in\Pi_H$，则

$$h(A)\in\Delta_H,k(A)\in\Pi_H.$$

我们首先由下列 Pick 定理的算子化着手，其中定理的(i)已在§3.2 中被证明(定理 3.2.2)．

定理 3.4.1　(i)对于每一 $f(z)\in H(\Delta,\Delta)$，$\forall\, z\in\Delta$，$A\in\Delta_H$，有不等式

$$\begin{aligned}&\{I-f(z)f(A)^*\}^{-1}\{f(A)^*-\overline{f(z)}I\}\\&\cdot\{f(A)-f(z)I\}\{I-\overline{f(z)}f(A)\}^{-1}\\&\leqslant(I-zA^*)^{-1}(A^*-\bar{z}I)(A-zI)(I-\bar{z}A)^{-1}\end{aligned}\tag{3.4.3}$$

成立，并且此不等式中严格不等号成立当且仅当 $(A^*-\bar{z}I)\cdot(A-zI)>0$ 以及

$$f(z)\neq\varepsilon\frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0z},|\varepsilon|=1,z_0\in\Delta.\tag{3.4.4}$$

(ii)对于每一 $g(z)\in H(\Delta,\Pi)$，$z\in\Delta$，$A\in\Delta_H$，有不等式

$$\begin{aligned}&\{g(A)^*+g(z)I\}^{-1}\{g(A)^*-\overline{g(z)}I\}\\&\cdot\{g(A)-g(z)I\}\{g(A)+\overline{g(z)}I\}^{-1}\\&\leqslant(I-zA^*)^{-1}(A^*-\bar{z}I)(A-zI)(I-\bar{z}A)^{-1}\end{aligned}\tag{3.4.5}$$

成立，其中严格不等号成立当且仅当 $(A^*-\bar{z}I)(A-zI)>0$ 并且

$$g(z)\neq\frac{1-z_0+\varepsilon(1-\bar{z}_0)z}{1+z_0-\varepsilon(1+\bar{z}_0)z},|\varepsilon|=1,z_0\in\Delta.\tag{3.4.6}$$

(iii)对于每一 $h(z)\in H(\Pi,\Delta)$，$z\in\Pi$，$A\in\Pi_H$，有不等式

$$\{I-h(z)h(A)^*\}^{-1}\{h(A)^*-\overline{h(z)}I\}$$

$$\cdot \{h(A)-h(z)I\}\{I-\overline{h(z)}h(A)\}^{-1}$$
$$\leqslant (A^*+zI)^{-1}(A-\bar{z}I)(A-zI)(A+\bar{z}I)^{-1} \tag{3.4.7}$$

成立，其中严格不等号成立当且仅当$(A^*-\bar{z}I)(A-zI)>0$并且

$$h(z)\neq\varepsilon\frac{z-z_0}{z+\bar{z}_0},|\varepsilon|=1,z_0\in\Pi. \tag{3.4.8}$$

(iv)对于每一$k(z)\in H(\Pi,\Pi)$，$z\in\Pi$，$A\in\Pi_H$，有不等式

$$\{k(A)^*+k(z)I\}^{-1}\{k(A)^*-\overline{k(z)}I\}$$
$$\cdot\{k(A)-k(z)I\}\{k(A)+\overline{k(z)}I\}^{-1}$$
$$\leqslant(A^*+zI)^{-1}(A^*-\bar{z}I)(A-zI)(A+\bar{z}I)^{-1} \tag{3.4.9}$$

成立，其中严格不等号成立当且仅当$(A^*-\bar{z}I)(A-zI)>0$并且

$$k(z)\neq\frac{(z+\bar{z}_0)+\varepsilon(z-z_0)}{(z+\bar{z}_0)-\varepsilon(z-z_0)},|\varepsilon|=1,z_0\in\Pi. \tag{3.4.10}$$

证明 (i)的证明见定理3.2.2.

(ii)令$f=\psi\circ g$，则$f\in H(\Delta,\Delta)$. 于是，由关系式

$$f(A)=\psi\circ g(A)=[g(A)-I][g(A)+I]^{-1},$$

我们有

$$f(A)-f(z)I=\frac{2}{g(z)+1}[g(A)-g(z)I][g(A)+I]^{-1},$$

$$I-\overline{f(z)}f(A)=\frac{2}{\overline{g(z)}+1}[g(A)+\overline{g(z)}I][g(A)+I]^{-1}.$$

由上两式可得

$$\{f(A)-f(z)I\}\{I-\overline{f(z)}f(A)\}^{-1}$$
$$=\frac{\overline{g(z)}+1}{g(z)+1}[g(A)-g(z)I][g(A)+\overline{g(z)}I]^{-1}.$$

因此，由上等式和(3.4.3)式，我们得(3.4.5)式. 至于严格不等式的条件可考察$g=\varphi\circ f$，(3.4.4)和(3.4.6)是等价的.

(iii)令$f=h\circ\varphi$，$w=\psi(z)$且$B=\psi(A)$. 则

$$f\in H(\Delta,\Delta),w\in\Delta.$$

因为 $\psi\in H(\Pi,\Delta)$，$A\in\Pi_H$，利用关系式

$$f(B)=h\circ\varphi\circ\psi(A)=h(A),$$
$$f(w)=h\circ\varphi\circ\psi(z)=h(z),$$

我们有

$$\begin{aligned}B-wI&=(A-I)(A+I)^{-1}-\frac{z-1}{z+1}I\\&=\frac{2}{z+1}(A-zI)(A+I)^{-1},\\I-\overline{w}B&=I-\frac{\bar{z}-1}{\bar{z}+1}(A-I)(A+1)^{-1}\\&=\frac{2}{\bar{z}+1}(A+\bar{z}I)(A+I)^{-1}.\end{aligned}$$

因此，将(i)应用于 f，w 和 B 可导出(iii)．事实上，

$$\begin{aligned}&\{I-f(w)f(B)^*\}^{-1}\{f(B)^*-\overline{f(w)}I\}\\&\cdot\{f(B)-f(w)I\}\{I-\overline{f(w)}f(B)^*\}^{-1}\\&\leqslant(I-wB^*)^{-1}(B^*-\overline{w}I)(B-wI)(I-wB)^{-1}.\end{aligned}$$

此式的左端可写为

$$\begin{aligned}&\{I-h(z)h(A)^*\}^{-1}\{h(A)^*-\overline{h(z)}I\}\\&\cdot\{h(A)-h(z)I\}\{I-\overline{h(z)}h(A)\}^{-1}.\end{aligned}$$

现在由

$$(I-\overline{w}B)^{*-1}(B^*-\overline{w}I)=\frac{z+1}{\bar{z}+1}(A^*+zI)^{-1}(A^*-\bar{z}I),$$

$$(B-wI)(I-\overline{w}B)^{-1}=\frac{\bar{z}+1}{z+1}(A-zI)(A+\bar{z}I),$$

推得(3.4.7)式．

(iv) 令 $h=\psi\circ k$，则 $h\in H(\Pi,\Delta)$．仿照(ii)之证明可得

$$\begin{aligned}&\{h(A)-h(z)I\}\{I-\overline{h(z)}h(A)\}^{-1}\\&=\frac{\overline{k(z)}+1}{k(z)+1}\{k(A)-k(z)I\}\{k(A)+\overline{k(z)}I\}^{-1}.\end{aligned}$$

应用(iii)于 h，则(iv)获证，故定理证毕．∎

为了证明 Pick-Julia 定理，我们需要下面几个引理．

引理 3.4.1 设 $A\in\Delta_H$，$B\in\Delta_H$，并且

$$\Phi(A,B)=(I-BB^*)^{-\frac{1}{2}}(A-B)(I-B^*A)^{-1}(I-B^*B)^{-\frac{1}{2}}. \tag{3.4.11}$$

则 $\Phi(A,B)\in\Delta_H$，并且对任意 $C\in\Delta_H$，不等式

$$\Phi(A,B)^*\Phi(A,B)\leqslant C^*C \tag{3.4.12}$$

等价于

$$\begin{aligned}&(I-B^*A)(I-A^*A)^{-1}(I-A^*B)\\ &\leqslant(I-B^*B)^{\frac{1}{2}}(I-C^*C)^{-1}(I-B^*B)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned} \tag{3.4.13}$$

证明 首先从

$$\begin{aligned}&(I-A^*B)\Big[\sum_{n=0}^{+\infty}(B^*B)^n\Big](I-B^*A)\\ &=\sum_{n=0}^{+\infty}(B^*B)^n+A^*\Big[\sum_{n=1}^{+\infty}(BB^*)^n\Big]A\\ &\quad -A^*B\Big[\sum_{n=0}^{+\infty}(B^*B)^n\Big]-\Big[\sum_{n=0}^{+\infty}(B^*B)^n\Big]B^*A\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}&(A^*-B^*)\Big[\sum_{n=0}^{\infty}(BB^*)^n\Big](A-B)\\ &=A^*\Big[\sum_{n=0}^{\infty}(BB^*)^n\Big]A+\sum_{n=1}^{\infty}(B^*B)^n\\ &\quad -A^*B\Big[\sum_{n=0}^{\infty}(B^*B)^n\Big]-\Big[\sum_{n=0}^{\infty}(B^*B)^n\Big]B^*A,\end{aligned}$$

其中所有级数均依范数拓扑收敛，我们导出

$$\begin{aligned}&(I-A^*B)(I-B^*B)^{-1}(I-B^*A)\\ &-(A^*-B^*)(I-BB^*)^{-1}(A-B)=I-A^*A\end{aligned} \tag{3.4.14}$$

和

$$\begin{aligned}&I-\Phi(A,B)^*\Phi(A,B)\\ &\quad=(I-B^*B)^{\frac{1}{2}}(I-A^*B)^{-1}\end{aligned}$$

$$\cdot\{(I-A^*B)(I-B^*B)^{-1}(I-B^*A)$$
$$-(A^*-B^*)(I-BB^*)^{-1}(A-B)\}$$
$$\cdot(I-B^*A)^{-1}(I-B^*B)^{\frac{1}{2}}$$
$$=(I-B^*B)^{\frac{1}{2}}(I-A^*B)^{-1}(I-A^*A)$$
$$\cdot(I-B^*A)^{-1}(I-B^*B)^{\frac{1}{2}}.$$

[等式(3.4.14)和(3.4.15)为华罗庚[73]及 Potapov[101]所证.]因为$\|A\|<1$(它等价于$I-A^*A>0$),所以,(3.4.15)式意味着

$$I-\Phi(A,B)^*\Phi(A,B)>0,$$

即

$$\|\Phi(A,B)\|<1.$$

再由(3.4.15)式,不等式(3.4.12)等价于

$$(I-B^*B)^{\frac{1}{2}}(I-A^*B)^{-1}(I-A^*A)(I-B^*A)^{-1}(I-B^*B)^{\frac{1}{2}}$$
$$\geqslant I-C^*C,$$

或者

$$(I-A^*B)^{-1}(I-A^*A)(I-B^*A)^{-1}$$
$$\geqslant(I-B^*B)^{-\frac{1}{2}}(I-C^*C)(I-B^*B)^{-\frac{1}{2}},$$

而此式等价于(3.4.13)式.故引理获证.　∎

引理 3.4.2　设$A\in\Pi_H,B\in\Pi_H$,并且

$$\Psi(A,B)=(\mathrm{Re}B)^{-\frac{1}{2}}(A-B)(A+B^*)^{-1}(\mathrm{Re}B)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.4.16}$$

则$\Psi(A,B)\in\Delta_H$;对每一$C\in\Delta_H$,不等式

$$\Psi(A,B)^*\Psi(A,B)\leqslant C^*C \tag{3.4.17}$$

等价于

$$(A+B^*)(\mathrm{Re}A)^{-1}(A^*+B)$$
$$\leqslant 4(\mathrm{Re}B)^{\frac{1}{2}}(I-C^*C)^{-1}(\mathrm{Re}B)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.4.18}$$

证明　首先,因为

$$B(\mathrm{Re}B)^{-1}B^*=\left(B^{*-1}\frac{B+B^*}{2}B^{-1}\right)^{-1}=\left(\frac{B^{*-1}+B^{-1}}{2}\right)^{-1},$$

我们有

$$B(\mathrm{Re}B)^{-1}B^*=B^*(\mathrm{Re}B^*)^{-1}B=B^*(\mathrm{Re}B)^{-1}B,$$

从而

$$(A^*+B)(\mathrm{Re}B)^{-1}(A+B^*)-(A^*-B^*)(\mathrm{Re}B)^{-1}(A-B)$$
$$=A^*(\mathrm{Re}B)^{-1}(B^*+B)+(B+B^*)(\mathrm{Re}B)^{-1}A=4\mathrm{Re}A.$$

据此，我们有

$$\begin{aligned}I-\Psi(A,B)^*\Psi(A,B)&=(\mathrm{Re}B)^{\frac{1}{2}}(A^*+B)^{-1}\{(A^*+B)(\mathrm{Re}B)^{-1}(A+B^*)\\&\quad-(A^*-B^*)(\mathrm{Re}B)^{-1}(A-B)\}(A+B^*)^{-1}(\mathrm{Re}B)^{\frac{1}{2}}\\&=4(\mathrm{Re}B)^{\frac{1}{2}}(A^*+B)^{-1}(\mathrm{Re}A)(A+B^*)^{-1}(\mathrm{Re}B)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}\tag{3.4.19}$$

于是，从(3.4.19)式及 $\mathrm{Re}A>0$，易知

$$I-\Psi(A,B)^*\Psi(A,B)>0,$$

即 $\Psi(A,B)\in\Delta_H$. 仍由(3.4.19)式，易证(3.4.17)式等价于

$$4(\mathrm{Re}B)^{\frac{1}{2}}(A^*+B)^{-1}(\mathrm{Re}A)(A+B^*)^{-1}(\mathrm{Re}B)^{\frac{1}{2}}\geqslant I-C^*C,$$

而此不等式等价于不等式(3.4.18). 引理证毕. ▍

引理 3.4.3 设 $A\in\Pi_H,B\in\Pi_H$，并且

$$C=\psi(A),D=\psi(B),\tag{3.4.20}$$

其中 Ψ 是由(3.4.2)式给出的. 则 $C\in\Delta_H,D\in\Delta_H$. 进一步地，对于由(3.4.11)及(3.4.16)式定义的 Φ 和 Ψ，我们有

$$\Phi(C,D)^*\Phi(C,D)=U^*\Psi(A,B)^*\Psi(A,B)U,\tag{3.4.21}$$

其中

$$U=(\mathrm{Re}B)^{-\frac{1}{2}}(B^*+I)\{(B^*+I)^{-1}(\mathrm{Re}B)(B+I)^{-1}\}^{\frac{1}{2}}\tag{3.4.22}$$

是酉算子.

证明 因为 $\psi\in H(\Pi,\Delta)$，$A\in\Pi_H,B\in\Pi_H$，所以，$C\in\Delta_H,D\in\Delta_H$. 由

$$C=(A+I)^{-1}(A-I),D=(B+I)^{-1}(B-I)$$

我们得到

$$I-DD^*=4(B+I)^{-1}(\mathrm{Re}B)(B^*+I)^{-1},$$

$$C-D=2(B+I)^{-1}(A-B)(A+I)^{-1},$$

$$I-D^*C=2(B^*+I)^{-1}(A+B^*)(A-I)^{-1},$$

$$I-D^*D=4(B^*+I)^{-1}(\mathrm{Re}B)(B+I)^{-1},$$

从而，由 Φ 及 Ψ 的定义，我们有

$$\begin{aligned}
\Phi(C,D)&=(I-DD^*)^{-\frac{1}{2}}(C-D)(I-D^*C)^{-1}(I-D^*D)^{\frac{1}{2}}\\
&=\{4(B+I)^{-1}(\mathrm{Re}B)(B^*+I)^{-1}\}^{-\frac{1}{2}}\\
&\quad\cdot 2(B+I)^{-1}(A-B)(A+I)^{-1}\\
&\quad\cdot\{2(B^*+I)^{-1}(A+B^*)(A+I)^{-1}\}^{-1}\\
&\quad\cdot\{4(B^*+I)^{-1}(\mathrm{Re}B)(B+I)^{-1}\}^{\frac{1}{2}}\\
&=\{(B+I)^{-1}(\mathrm{Re}B)(B^*+I)^{-1}\}^{-\frac{1}{2}}\\
&\quad\cdot\{(B+I)^{-1}(A-B)(A+I)^{-1}\}\\
&\quad\cdot\{(A+I)(A+B^*)^{-1}(B^*+I)\}\\
&\quad\cdot\{(B^*+I)^{-1}(\mathrm{Re}B)(B+I)^{-1}\}^{\frac{1}{2}}\\
&=\{(B+I)^{-1}(\mathrm{Re}B)(B^*+I)^{-1}\}^{-\frac{1}{2}}\\
&\quad\cdot(B+I)^{-1}(A-B)(A+B^*)^{-1}(B^*+I)\\
&\quad\cdot\{(B^*+I)^{-1}(\mathrm{Re}B)(B+I)^{-1}\}^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}
&\Phi(C,D)^*\Phi(C,D)\\
&\quad=\{(B^*+I)^{-1}(\mathrm{Re}B)(B+I)^{-1}\}^{\frac{1}{2}}\\
&\qquad\cdot(B-I)(A^*+B)^{-1}(A^*-B^*)\\
&\qquad\cdot(\mathrm{Re}B)^{-1}(A-B)(A+B^*)^{-1}(B^*+I)\\
&\qquad\cdot\{(B^*+I)^{-1}(\mathrm{Re}B)(B+I)^{-1}\}^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}\tag{3.4.23}$$

并且

$$\begin{aligned}
\Psi(A,B)^*\Psi(A,B)=&(\mathrm{Re}B)^{\frac{1}{2}}(A^*+B)^{-1}(A^*-B^*)(\mathrm{Re}B)^{-\frac{1}{2}}\\
&\cdot(\mathrm{Re}B)^{-\frac{1}{2}}(A-B)(A+B^*)^{-1}(\mathrm{Re}B)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

令

$$U=(\mathrm{Re}B)^{-\frac{1}{2}}(B^*+I)\{(B^*+I)^{-1}(\mathrm{Re}B)(B+I)^{-1}\}^{\frac{1}{2}}.$$

则

$$UU^*=I=U^*U,$$

即 U 为酉算子，并且

$$\Phi(C,D)^*\Phi(C,D)=U^*\Psi(A,B)^*\Psi(A,B)U.$$

故引理获证. ∎

下面给出的定理 3.4.2 是 Pick 定理的另一说法，它是应用引理 3.4.1，3.4.2 重新形成的定理 3.4.1. 因为定理 3.4.2 的直接推论恰好是关于算子的 Julia 引理，因此，定理 3.4.2 被称为关于算子的 Pick-Julia 定理[23].

定理 3.4.2　(a)　设 $f\in H(\Delta,\Delta)$，$z\in\Delta$ 且 $A\in\Delta_H$. 则

$$[I-\overline{f(z)}f(A)][I-f(A)^*f(A)]^{-1}[I-f(z)f(A)^*]$$
$$\leqslant\frac{1-|f(z)|^2}{1-|z|^2}(I-\bar{z}A)(I-A^*A)^{-1}(I-zA^*). \quad (3.4.24)$$

(b)　如果 $g\in H(\Delta,\Pi)$，$z\in\Delta$ 且 $A\in\Delta_H$，则

$$[g(A)+\overline{g(z)}I][\mathrm{Re}g(A)]^{-1}[g(A)^*+g(z)I]$$
$$\leqslant\frac{4\mathrm{Re}g(z)}{1-|z|^2}(I-\bar{z}A)(I-A^*A)^{-1}(I-zA^*). \quad (3.4.25)$$

(c)　设 $h\in H(\Pi,\Delta)$，$z\in\Pi$ 且 $A\in\Pi_H$，则

$$[I-\overline{h(z)}h(A)][I-h(A)^*h(A)]^{-1}[I-h(z)h(A)^*]$$
$$\leqslant\frac{1-|h(z)|^2}{4\mathrm{Re}z}(A+\bar{z}I)(\mathrm{Re}A)^{-1}(A^*+zI). \quad (3.4.26)$$

(d)　如果 $k\in H(\Pi,\Pi)$，$z\in\Pi$ 且 $A\in\Pi_H$，则

$$[k(A)+\overline{k(z)}I][\mathrm{Re}k(A)]^{-1}[k(A)^*+k(z)I]$$
$$\leqslant\frac{\mathrm{Re}k(z)}{\mathrm{Re}z}(A+\bar{z}I)(\mathrm{Re}A)^{-1}(A^*+zI). \quad (3.4.27)$$

证明　(a)　因为 $(1-|f(z)|^2)^{\frac{1}{2}}I$ 与一切算子均可交换，所以，由(3.4.11)式，我们有

$$\Phi(f(A),f(z)I)$$

$$=(1-|f(z)|^2)^{-\frac{1}{2}}(f(A)-f(z)I)(I-\overline{f(z)}A)^{-1}$$
$$\cdot(1-|f(z)|^2)^{\frac{1}{2}}I$$
$$=\{f(A)-f(z)I\}\{I-\overline{f(z)}f(A)\}^{-1},$$

因此，不等式(3.4.3)可以写为

$$\Phi(f(A),f(z)I)^*\Phi(f(A),f(z)I)\leqslant C^*C,$$

其中 $C=(A-zI)(I-\bar{z}A)^{-1}$. 由引理 3.4.1，最后的不等式等价于

$$[I-\overline{f(z)}f(A)][I-f(A)^*f(A)]^{-1}[I-f(z)f(A)^*]$$
$$\leqslant(1-|f(z)|^2)(I-C^*C)^{-1}.$$

容易验证下面等式成立：

$$(I-C^*C)^{-1}=\frac{1}{1-|z|^2}(I-\bar{z}A)(I-A^*A)^{-1}(I-zA^*),$$

并且(3.4.24)等价于(3.4.3). 故(a)得证.

(b)　由(3.4.16)式，不等式(3.4.5)式可以写为

$$\Psi(g(A),g(z)I)^*\Psi(g(A),g(z)I)\leqslant C^*C,$$

其中 $C=(A-zI)(I-\bar{z}A)^{-1}$. 由引理 3.4.2，(3.4.25)式等价于最后的一个不等式. 因此，(b)获证.

(c)　因为 $\mathrm{Re}A>0$，$\mathrm{Re}z>0$，则有

$$I-(A^*+zI)^{-1}(A^*-\bar{z}I)(A-zI)(A+\bar{z}I)^{-1}$$
$$=4(\mathrm{Re}z)(A^*+zI)^{-1}(\mathrm{Re}A)(A+\bar{z}I)^{-1}>0.$$

因此

$$\|(A-zI)(A+\bar{z}I)^{-1}\|<1.$$

不等式(3.4.7)可以写为

$$\Phi(h(A),h(z)I)^*\Phi(h(A),h(z)I)\leqslant C^*C,$$

其中 $C=(A-zI)(A+\bar{z}I)^{-1}$，并且

$$(I-C^*C)^{-1}=\frac{1}{4\mathrm{Re}z}(A+\bar{z}I)(\mathrm{Re}A)^{-1}(A^*+zI).$$

因此，由引理 3.4.1，(3.4.26)式等价于最后的一个不等式. 故(c)得证.

(d)　不等式(3.4.9)可写为

$$\Psi(k(A),k(z)I)^*\Psi(k(A),k(z)I)\leqslant C^*C,$$

其中 $C=(A-zI)(A+\bar{z}I)^{-1}$. 由引理 3.4.2,(3.4.27)式等价于最后的一个不等式. 因此,(d)获证.

综合以上证明,定理得证. ▍

由上述证明易知定理 3.4.1 关于严格不等式的判断亦可延用于定理 3.4.2.

推论 3.4.1　(a)　设 $f\in H(\Delta,\Delta)$. 如果存在一序列 $\{z_n\}\subseteq\Delta$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}z_n=\lim_{n\to\infty}f(z_n)=1\ 且\ \lim_{n\to\infty}\frac{1-|f(z_n)|^2}{1-|z_n|^2}=\alpha<\infty, \tag{3.4.28}$$

则 $\alpha>0$,并且对于任意的 $A\in\Delta_H$,不等式

$$[I-f(A)][I-f(A)^*f(A)]^{-1}[I-f(A)^*]$$
$$\leqslant\alpha(I-A)(I-A^*A)^{-1}(I-A^*) \tag{3.4.29}$$

成立.

(b)　设 $g\in H(\Delta,\Pi)$. 如果存在一序列 $\{z_n\}\subseteq\Delta$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}z_n=1,\lim_{n\to\infty}g(z_n)=\infty\ 且\ \lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{Re}(g(z_n))}{(1-|z_n|^2)|g(z_n)|^2}=\alpha<\infty, \tag{3.4.30}$$

则 $\alpha>0$,并且对于任意的 $A\in\Delta_H$,不等式

$$\mathrm{Re}g(A)\geqslant\frac{1}{4\alpha}(I-A^*)^{-1}(I-A^*A)(I-A)^{-1} \tag{3.4.31}$$

成立.

(c)　设 $h\in H(\Pi,\Delta)$. 如果存在一序列 $\{z_n\}\subseteq\Pi$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}z_n=\infty,\lim_{n\to\infty}h(z_n)=1\ 且\ \lim_{n\to\infty}\frac{|z_n|^2(1-|h(z_n)|^2)}{\mathrm{Re}z_n}=\alpha<\infty, \tag{3.4.32}$$

则 $\alpha>0$,并且对于任意的 $A\in\Pi_H$,不等式

$$[I-h(A)][I-h(A)^*h(A)]^{-1}[I-h(A)^*]\leqslant\frac{\alpha}{4}(\mathrm{Re}A)^{-1} \tag{3.4.33}$$

成立.

(*d*) 设 $k\in H(\Pi,\Pi)$. 如果存在一序列 $\{z_n\}\subseteq\Pi$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}z_n=\lim_{n\to\infty}k(z_n)=\infty \text{ 且 } \lim_{n\to\infty}\frac{|z_n|^2}{|k(z_n)|^2}\cdot\frac{\mathrm{Re}k(z_n)}{\mathrm{Re}z_n}=\alpha<\infty,$$

则 $\alpha>0$, 并且对于任意的 $A\in\Pi_H$, 不等式

$$\alpha\mathrm{Re}k(A)\geqslant\mathrm{Re}A \tag{3.4.35}$$

成立.

§3.5

算子解析函数的重叠

Wolff 证明了下面的经典定理[112], 后来, Burckel[122]对此又作了进一步的讨论.

Wolff 定理 设 $f(z)$ 为 Δ 内的解析函数使得 $f(\Delta)\subseteq\Delta$ 且对任意 $z\in\Delta$, $f(z)\neq z$. 设 $f^{[n]}$ 为 f 的第 n 次重叠($f^{[1]}=f$, $f^{[n]}=f\circ f^{[n-1]}$, $n\geqslant 2$). 则存在一复数 w, $|w|=1$ 使得

$$|f^{[n]}(z)-c(w,z)w|\leqslant r(w,z), \forall\ z\in\Delta, n=1,2\cdots, \tag{3.5.1}$$

其中

$$c(w,z)=\frac{1-|z|^2}{2-2\mathrm{Re}(\overline{w}z)}, \tag{3.5.2}$$

$$r(w,z)=\frac{1-\overline{w}z}{2-2\mathrm{Re}(\overline{w}z)}. \tag{3.5.3}$$

容易验证:

$$|z-c(w,z)w|=r(w,z),$$

$$c(w,z)+r(w,z)=1.$$

事实上, 令 $z=re^{i\theta}$, $w=\rho e^{i\varphi}=e^{i\varphi}$, 则

$$|z-c(w,z)w|^2$$

$$=\left|re^{i\theta}-\frac{(1-r^2)e^{i\varphi}}{2-2\mathrm{Re}(\overline{w}z)}\right|^2$$

$$=\left|\frac{re^{i(\theta-\varphi)}[2-2r\cos(\theta-\varphi)-(1-r^2)]}{2-2r\cos(\theta-\varphi)}\right|^2$$

$$=\frac{[r(2-2r\cos(\theta-\varphi))\cos(\theta-\varphi)-(1-r^2)]^2}{(2-2r\cos(\theta-\varphi))^2}$$

$$+\frac{[r^2(2-2r\cos(\theta-\varphi))^2\sin^2(\theta-\varphi)]}{(2-2r\cos(\theta-\varphi))^2}$$

$$=\frac{[(1+r^2)-2r\cos(\theta-\varphi)]^2}{[2-2r\cos(\theta-\varphi)]^2}.$$

而

$$r(w,z)=\frac{1-re^{i(\theta-\varphi)}}{2-2\mathrm{Re}(\overline{w}z)}=\frac{(1+r^2)-2r\cos(\theta-\varphi)}{2-2\mathrm{Re}(\overline{w}z)}$$

故

$$|z-c(w,z)w|=r(w,z),$$

$$r(w,z)+c(w,z)=1.$$

樊墈推广了 Wolff 定理为下列定理[52].

定理 3.5.1 设 f 为 Δ 内的解析函数使得 $f(\Delta)\subseteq\Delta$,并且对于任意 $z\in\Delta$, $f(z)\neq z$. 以 $f^{[n]}$表 f 的第 n 次重叠. 则必存在一复数 w, $|w|=1$,使得

$$\| f^{[n]}(A)-c(w,A)wI \|\leqslant r(w,A),n=1,2\cdots, \tag{3.5.4}$$

其中 A 为 Hilbert 空间 H 上的真压缩算子. 其次,对任意复数 w, $|w|=1$,及其真压缩算子 A,下列关系式

$$\| A-c(w,A)wI \| =r(w,A), \tag{3.5.5}$$

$$c(w,A)+r(w,A)=1 \tag{3.5.6}$$

成立,其中

$$c(w,A)=\frac{\| (I-\overline{w}A)(2I-\overline{w}A-wA^*)^{-1}(I-wA^*) \|}{\| (I-\overline{w}A)(I-A^*A)^{-1}(I-wA^*) \|}. \tag{3.5.7}$$

$$r(w,A)=\| (I-\overline{w}A)(2I-\overline{w}A-wA^*)^{-1}(I-wA^*) \|. \tag{3.5.8}$$

为了证明上述定理，除了需要引用前面已证明了的基本定理和 Pick 定理之外，尚需下面引理．

引理 3.5.1 设 A 为 Hilbert 空间上的真压缩算子，z 为 $|z|<1$ 的复数，并且 $0\leqslant\rho<1$．则

$$\|(A-zI)(I-\bar{z}A)^{-1}\|<1. \tag{3.5.9}$$

其次，不等式

$$\|(A-zI)(I-\bar{z}A)^{-1}\|\leqslant\rho \tag{3.5.10}$$

成立，当且仅当

$$\left\|A-\frac{(1-\rho^2)z}{1-\rho^2|z|^2}I\right\|\leqslant\frac{(1-|z|^2)\rho}{1-\rho^2|z|^2}. \tag{3.5.11}$$

(3.5.10)与(3.5.11)中的等式同时成立或不成立．

证明 不等式(3.5.9)直接由基本定理可得．不等式(3.5.10)等价于

$$(I-zA^*)^{-1}(A^*-\bar{z}I)(A-zI)(I-\bar{z}A)^{-1}\leqslant\rho^2I.$$

此即

$$(A^*-\bar{z}I)(A-zI)\leqslant\rho^2(I-zA^*)(I-\bar{z}A).$$

将上式展开，则有

$$A^*A-zA^*-\bar{z}A+|z|^2I\leqslant\rho^2(I-\bar{z}A-zA^*+|z|^2A^*A),$$

即

$$A^*A(1-\rho^2|z|^2)-z(1-\rho^2)A^*-\bar{z}(1-\rho^2)A\leqslant(\rho^2-|z|^2)I,$$

又即

$$A^*A-\frac{z(1-\rho^2)}{1-\rho^2|z|^2}A^*-\frac{\bar{z}(1-\rho^2)}{1-\rho^2|z|^2}A\leqslant\frac{\rho^2-|z|^2}{1-\rho^2|z|^2}I.$$

上式两端同时加$\frac{|z|^2(1-\rho^2)^2}{(1-\rho^2|z|^2)^2}I$，得

$$\left(A^*-\frac{(1-\rho^2)\bar{z}}{1-\rho^2|z|^2}I\right)\left(A-\frac{(1-\rho^2)z}{1-\rho^2|z|^2}I\right)\leqslant\frac{(1-|z|^2)^2\rho^2}{(1-\rho^2|z|^2)^2}I.$$

因为上不等式与不等式(3.5.11)等价，所以(3.5.10)与(3.5.11)等价．

上述证明中，如果将"$\leqslant$"换为"$<$"结论仍然成立．从而

(3.5.10)式中的等式成立当且仅当(3.5.11)式中的等式成立．引理得证． ▌

定理 3.5.1 的证明：

设 $f(z)$ 为 Δ 内解析函数且 $f(\Delta)\subseteq\Delta$，$f(z)\neq z$，$\forall\ z\in\Delta$．取一序列 $\{a_k\}$ 使得 $0<a_k<1$，$\lim\limits_{k\to\infty}a_k=1$．令 $f_k=a_kf$．由于

$$|z-(z-f_k(z))|<a_k=|z|.$$

则由 Rouché 定理，存在唯一的 z_k，$|z_k|<a_k$，$z_k-f_k(z_k)=0$．在序列 $\{z_k\}$ 中选取一收敛子序列，不妨仍记为 $\{z_k\}$．令 $w=\lim\limits_{k\to\infty}z_k$．则 $|w|\leqslant 1$．因为对任意 $z\in\Delta$，$f(z)\neq z$，所以必有 $|w|=1$．否则，

$$f(w)=\lim_{k\to\infty}f(z_k)=\lim_{k\to\infty}z_k=w,$$

此与 $f(z)\neq z(z\in\Delta)$ 矛盾．

现考虑 H 上一固定的真压缩算子 A．以 $f_k^{[n]}$ 表 f_k 的 n 次重叠．因为对正整数 k 和 n，$f_k^{[n]}(\Delta)\subseteq\Delta$，所以，由基本定理，

$$\|f_k^{[n]}(A)\|<1, \tag{3.5.12}$$

并且，由定理 3.2.2(Pick 定理)，

$$\begin{aligned}&\|\{f_k^{[n]}(A)-z_kI\}\{I-\bar{z}_kf_k^{[n]}(A)\}^{-1}\|\\&=\|\{f_k^{[n]}(A)-f_k^{[n]}(z_k)I\}\{I-f_k^{[n]}(z_k)f_k^{[n]}(A)\}^{-1}\|\\&\leqslant\|(A-z_kI)(I-\bar{z}_kA)^{-1}\|.\end{aligned} \tag{3.5.13}$$

令

$$\rho_k=\|(A-z_kI)(I-\bar{z}_kA)^{-1}\|, \tag{3.5.14}$$

$$c_k=\frac{1-\rho_k^2}{1-\rho_k^2|z_k|^2} \tag{3.5.15}$$

$$r_k=\frac{(1-|z_k|^2)\rho_k}{1-\rho_k^2|z_k|^2}. \tag{3.5.16}$$

则由引理 3.5.1，(3.5.13)式可写成下列不等式

$$\|f_k^{[n]}(A)-c_kz_kI\|\leqslant r_k,\forall\ n,k. \tag{3.5.17}$$

对于每一固定的 n，则有

$$\lim_{k\to\infty}f_k^{[n]}(z)=f^{[n]}(z),z\in\Delta.$$

事实上，由于序列$\{f_k^{[n]};k=1,2,\cdots\}$在$\Delta$内为一致有界的，故它是$\Delta$内的正规族．从而，由 Vitali 定理[71]可断言

$$\lim_{k\to\infty} f_k^{[n]}(z)=f^{[n]}(z)$$

在Δ的紧子集上一致成立，即$f^{[n]}(z)$为Δ内的解析函数．由性质 2.2.1(或[45]，P.571)

$$\lim_{k\to\infty}\| f_k^{[n]}(A)-f^{[n]}(A)\| =0. \tag{3.5.18}$$

由于

$$\begin{aligned}
&\lim_{k\to\infty}\|(A-z_kI)(I-\bar{z}_kA)^{-1}\|\\
&=\|(A-wI)(I-\bar{w}A)^{-1}\|\\
&=\|w(\bar{w}A-I)(I-\bar{w}A)^{-1}\|=|w|=1,
\end{aligned}$$

则我们有

$$\lim_{k\to\infty}\rho_k=1. \tag{3.5.19}$$

其次，对于H上的任一真压缩算子B，我们有

$$\begin{aligned}
(1-\|B\|^2)^{-1}&=(1-\|B^*B\|)^{-1}\\
&=(1-\sup\sigma(B^*B))^{-1}\\
&=\sup\sigma((I-B^*B)^{-1}),
\end{aligned}$$

从而

$$(1-\|B\|^2)^{-1}=\|(I-B^*B)^{-1}\|. \tag{3.5.20}$$

由(3.5.14)式及引理 3.5.1，我们有$\rho_k<1$，并且

$$\|z_k(A-z_kI)(I-\bar{z}_kA)^{-1}\|=\rho_k|z_k|<1.$$

应用(3.5.20)于

$$B=z_k(A-z_kI)(I-\bar{z}_kA)^{-1},$$

得到

$$\begin{aligned}
&(1-\rho_k^2|z_k|^2)^{-1}\\
&=\|\{I-|z_k|^2(I-z_kA^*)^{-1}(A^*-\bar{z}_kI)(A-z_kI)\\
&\quad\cdot(I-\bar{z}_kA)^{-1}\}^{-1}\|.
\end{aligned}$$

而上式右端花括号内的算子有恒等式：

$$I-|z_k|^2(I-z_kA^*)^{-1}(A^*-\bar{z}_kI)(A-z_kI)(I-\bar{z}_kA)^{-1}$$

$$=(I-z_kA^*)^{-1}\{(I-z_kA^*)(I-\bar{z}_kA)$$
$$-|z_k|^2(A^*-\bar{z}_kI)(A-z_kI)\}(I-\bar{z}_kA)^{-1}$$
$$=(1-|z_k|^2)(I-z_kA^*)^{-1}\{(1+|z_k|^2)I-\bar{z}_kA-z_kA^*\}$$
$$\cdot(I-\bar{z}_kA)^{-1}.$$

故得

$$\frac{1-|z_k|^2}{1-\rho_k^2|z_k|^2}$$
$$=\|(I-z_kA)\{(1+|z_k|^2)I-\bar{z}_kA-z_kA^*\}^{-1}(I-z_kA^*)\|. \tag{3.5.21}$$

于是，由(3.5.16)，(3.5.8)，(3.5.19)以及(3.5.21)式导出

$$\lim_{k\to\infty}r_k=r(w,A). \tag{3.5.22}$$

将(3.5.20)应用于

$$B=(A-z_kI)(I-z_kA)^{-1},$$

我们得到

$$(1-\rho_k^2)^{-1}$$
$$=(1-\|(A-z_kI)(I-\bar{z}_kA)^{-1}\|^2)^{-1}$$
$$=\|\{(I-(I-z_kA^*)^{-1}(A^*-\bar{z}_kI)(A-z_kI)(I-\bar{z}_kA)^{-1}\}^{-1}\|$$

而由恒等式

$$I-(I-z_kA^*)^{-1}(A^*-\bar{z}_kI)(A-z_kI)(I-\bar{z}_kA)^{-1}$$
$$=(I-z_kA^*)^{-1}\{(I-z_kA^*)(I-\bar{z}_kA)$$
$$-(A^*-\bar{z}_kI)(A-z_kI)\}(I-\bar{z}_kA)^{-1}$$
$$=(1-|z_k|^2)(I-z_kA^*)^{-1}(I-A^*A)(I-\bar{z}_kA)^{-1},$$

我们有

$$\frac{1}{1-|z_k|^2}\|(I-\bar{z}_kA)(I-A^*A)^{-1}(I-z_kA^*)\|=\frac{1}{1-\rho_k^2}.$$

因此

$$\frac{1-|z_k|^2}{1-\rho_k^2}=\|(I-\bar{z}_kA)(I-A^*A)^{-1}(I-z_kA^*)\|.$$

从而

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1-|z_k|^2}{1-\rho_k^2}=\|(I-\overline{w}A)(I-A^*A)^{-1}(I-wA^*)\|.$$

(3.5.23)

由

$$c_k=\frac{r_k}{\rho_k}\cdot\frac{1-\rho_k^2}{1-|z_k|^2},$$

以及(3.5.19),(3.5.22),(3.5.23),我们得

$$\lim_{k\to\infty}c_k=c(w,A),$$

其中 $c(w,A)$ 依定义(3.5.7)式. 再利用关系式(3.5.18),(3.5.22),(3.5.24)和 $\lim\limits_{k\to\infty}z_k=w$,由(3.5.17)式,令 $k\to\infty$,则得不等式(3.5.4).

在上面关于(3.5.4)不等式的证明中,序列 $\{z_k\}$ 及其极限 w 依赖于函数 f. 现在证明(3.5.5)和(3.5.6)式对任何 w,其中 $|w|=1$ 以及 H 上的任一真压缩算子 A 均成立,即与函数 f 无关.

考虑任一复数 $w(|w|=1)$. 选取 $\{z_k\}$, $z_k\in\Delta$, $\lim\limits_{k\to\infty}z_k=w$. 设 A 为 H 上的任一真压缩算子. 仍用(3.5.14),(3.5.15),(3.5.16)分别定义 ρ_k、c_k 和 r_k. 应用引理于(3.5.14),我们有

$$\|A-c_kz_kI\|=r_k. \tag{3.5.25}$$

为了由(3.5.25)导出(3.5.5),只须注意(3.5.22),(3.5.24)的证明方法仍然有效.

最后,为了证明(3.5.6),我们注意

$$\begin{aligned}&1+\|(I-\overline{w}A)(I-A^*A)^{-1}(I-wA^*)\|^{-1}\\&\quad=1+\{\sup\sigma[(I-\overline{w}A)(I-A^*A)^{-1}(I-wA^*)]\}^{-1}\\&\quad=\inf\sigma[I+(I-wA^*)^{-1}(I-A^*A)(I-\overline{w}A)^{-1}].\end{aligned}$$

将此式与下列恒等式结合.

$$\begin{aligned}&I+(I-wA^*)^{-1}(I-A^*A)(I-\overline{w}A)^{-1}\\&\quad=(I-wA^*)^{-1}\{(I-wA^*)(I-\overline{w}A)+(I-A^*A)\}\\&\qquad\cdot(I-\overline{w}A)^{-1}\end{aligned}$$

$$=(I-wA^*)^{-1}(2I-\overline{w}A-wA^*)(I-\overline{w}A)^{-1}$$

则得

$$1+\|(I-\overline{w}A)(I-A^*A)^{-1}(I-wA^*)\|^{-1}$$
$$=\inf\sigma[(I-wA^*)^{-1}(2I-\overline{w}A-wA^*)(I-\overline{w}A)^{-1}]$$
$$=\|(I-\overline{w}A)(2I-\overline{w}A-wA^*)^{-1}(I-wA^*)\|^{-1}.$$

上式即为(3.5.6)式．定理得证．∎

下面我们将给出定理 3.5.1 的两个改进的结果．在证明定理 3.5.2，3.5.3[53]之前，我们需要证明下面两个引理．

引理 3.5.2　设 A 为 Hilbert 空间 H 上的真压缩算子，w 为一复数且 $|w|\leqslant 1$，$d>0$. 则不等式

$$\|(I-\overline{w}A)(I-A^*A)^{-1}(I-wA^*)\|\leqslant d \quad (3.5.26)$$

等价于

$$\left\|A-\frac{w}{d+|w|^2}I\right\|\leqslant\frac{[d(d+|w|^2-1)]^{\frac{1}{2}}}{d+|w|^2}. \quad (3.5.27)$$

其次，(3.5.26)的等式成立当且仅当(3.5.27)的等式成立．

若 $|w|<1$，则(3.5.26)和(3.5.27)均等价于

$$\|(A-wI)(I-\overline{w}A)^{-1}\|\leqslant\left(\frac{d+|w|^2-1}{d}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.5.28)$$

并且(3.5.26)，(3.5.27)，(3.5.28)的等式同时成立或不成立．

证明　因为不等式(3.5.26)等价于

$$(I-\overline{w}A)(I-A^*A)^{-1}(I-wA^*)\leqslant dI,$$

即

$$(I-A^*A)^{-1}\leqslant d(I-\overline{w}A)^{-1}(I-wA^*)^{-1},$$

亦即

$$d(I-A^*A)\geqslant(I-wA^*)(I-\overline{w}A).$$

而上式可写为

$$\left\{A^*-\frac{\overline{w}}{d+|w|^2}I\right\}\left\{A-\frac{w}{d+|w|^2}I\right\}\leqslant\frac{d(d+|w|^2-1)}{(d+|w|^2)^2}I. \quad (3.5.29)$$

因此,(3.5.26)与(3.5.27)等价.

不等式(3.5.28)等价于

$$(I-wA^*)^{-1}(A^*-\overline{w}I)(A-wI)(I-\overline{w}A)^{-1}\leqslant\frac{d+|w|^2-1}{d}I,$$

或者

$$(A^*-\overline{w}I)(A-wI)\leqslant\frac{d+|w|^2-1}{d}(I-wA^*)(I-\overline{w}A),$$

此式可写为

$$(1-|w|^2)\{(d+|w|^2)A^*A-\overline{w}A-wA^*+(1-d)I\}\leqslant 0.$$

如果$|w|<1$,则上式等价于

$$(d+|w|^2)A^*A-wA-wA^*+(1-d)I\leqslant 0.$$

而此不等式等价于(3.5.29). 因此,当$|w|<1$时,(3.5.28)与(3.5.27),从而,也与(3.5.26)等价.

将上面的证明过程中的不等号换为严格不等号,结果仍然有效. 因此,(3.5.26),(3.5.27),(3.5.28)式的严格不等号同时成立. 由此亦知,当$|w|<1$时,它们的等号同时成立或同时不成立. 故引理得证. ▌

引理 3.5.3 设 Hilbert 空间 H 上的算子 B 满足 $\mathrm{Re}B>0$,ω 是一复数且 $\mathrm{Re}\omega\geqslant 0$,$\delta>0$. 则

$$\|(B+\overline{\omega}I)(\mathrm{Re}B)^{-1}(B^*+\omega I)\|\leqslant\delta \qquad (3.5.30)$$

等价于

$$\left\|B-\left(\frac{\delta}{2}-\overline{\omega}\right)I\right\|\leqslant\left(\frac{\delta^2}{4}-\delta\mathrm{Re}\omega\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (3.5.31)$$

(3.5.30)等式成立当且仅当(3.5.31)等式成立.

若 $\mathrm{Re}\omega>0$,则(3.5.30),(3.5.31)均等价于

$$\|(B-\omega I)(B+\overline{\omega}I)^{-1}\|\leqslant\left(1-\frac{4\mathrm{Re}\omega}{\delta}\right)^{\frac{1}{2}}; \qquad (3.5.32)$$

并且(3.5.30),(3.5.31),(3.5.32)等式同时成立或同时不成立.

证明 由于(3.5.30)等价于

$$(B+\overline{\omega}I)(\mathrm{Re}B)^{-1}(B^*+\omega I)\leqslant\delta I,$$

或者

$$\delta\mathrm{Re}B\geqslant(B^*+\omega I)(B+\overline{\omega}I),$$

而此式可写为

$$\left\{B^*-\left(\frac{\delta}{2}-\omega\right)I\right\}\left\{B-\left(\frac{\delta}{2}-\overline{\omega}\right)I\right\}\leqslant\left(\frac{\delta^2}{4}-\delta\mathrm{Re}\omega\right)I,\tag{3.5.33}$$

因此,(3.5.30)等价于(3.5.31).

不等式(3.5.32)等价于

$$(B^*+\omega I)^{-1}(B^*-\overline{\omega}I)(B-\omega I)(B+\overline{\omega}I)^{-1}\leqslant\left(1-\frac{4\mathrm{Re}\omega}{\delta}\right)I,$$

或者

$$(B^*-\overline{\omega}I)(B-\omega I)\leqslant\left(1-\frac{4\mathrm{Re}\omega}{\delta}\right)(B^*+\omega I)(B+\overline{\omega}I),$$

或者

$$\frac{4\mathrm{Re}\omega}{\delta}\left\{B^*B-\left(\frac{\delta}{2}-\omega\right)B-\left(\frac{\delta}{2}-\overline{\omega}\right)B^*+|w|^2I\right\}\leqslant 0.$$

当 $\mathrm{Re}\omega>0$ 时,上不等式等价于(3.5.33). 因此,当 $\mathrm{Re}\omega>0$ 时,(3.5.32)等价于(3.5.31),从而,也等价于(3.5.30).

显然,若将上面陈述中的不等号换为严格不等号同样有效. 因此,当 $\mathrm{Re}\omega>0$ 时,(3.5.30),(3.5.31),(3.5.32)等式同时成立或同时不成立. 故引理获证. ▌

定理 3.5.2 设 f 为 Δ 内的复值解析函数,并且 $f(\Delta)\subseteq\Delta$. 设 $f^{[n]}(n=1,2,\cdots)$ 定义 f 的 n 次重叠(即,$f^{[1]}=f$, $f^{[n]}=f\circ f^{[n-1]}$, $n\geqslant 2$). 则存在一复数 w, $|w|\leqslant 1$,使得下面的不等式(3.5.34),(3.5.35),(3.5.36)和(3.5.37)对于 H 上的任一真压缩算子均成立:

$$\begin{aligned}(1-|w|^2)I&\leqslant\{I-\overline{w}f(A)\}\{I-f(A)^*f(A)\}^{-1}\{I-wf(A)^*\}\\&\leqslant(1-\overline{w}A)(I-A^*A)(I-wA^*),\end{aligned}\tag{3.5.34}$$

$$(1-|w|^2)I\leqslant\{I-\overline{w}f(A)\}\{(1+|w|^2)I-\overline{w}f(A)-wf(A)^*\}^{-1}$$

$$\cdot \{I - wf(A)^*\}$$
$$\leqslant (I-\overline{w}A)\{(1+|w|^2)I-\overline{w}A-wA^*\}^{-1}(I-wA^*),$$
(3.5.35)

$$\left\| f^{[n]}(A) - \frac{w}{d(w,A)+|w|^2} I \right\|$$
$$\leqslant \left\| A - \frac{w}{d(w,A)+|w|^2} I \right\|$$
$$= \frac{\{d(w,A)[d(w,A)+|w|^2-1]\}^{\frac{1}{2}}}{d(w,A)+|w|^2},$$
(3.5.36)

$$\| [f^{[n]}(A) - wI][I-\overline{w}f^{[n]}(A)]^{-1} \|$$
$$\leqslant \| (A-wI)(I-\overline{w}A)^{-1} \|$$
$$= \left(\frac{d(w,A)+|w|^2-1}{d(w,A)} \right)^{\frac{1}{2}},$$
(3.5.37)

其中 $n=1,2,\cdots$，并且
$$d(w,A) = \| (I-\overline{w}A)(I-A^*A)^{-1}(I-wA^*) \|.$$
(3.5.38)

其次，当 $|w|\neq 1$ 时，我们有 $f(w)=w$.

证明 取一序列 $\{a_k\}$ 使 $0<a_k<1$ 并且 $\lim\limits_{k\to\infty} a_k=1$. 令 $f_k=a_k f$. 由于对于 $|z|=a_k$, $|z-(z-f_k(z))|<a_k=|z|$，则依 Rouché 定理，存在唯一的 z_k 满足 $|z_k|<a_k$ 且 $z_k-f_k(z_k)=0$. 取 $\{z_k\}$ 的一收敛子序列，不妨仍记为 $\{z_k\}$. 令 $w=\lim\limits_{k\to\infty} z_k$. 则 $|w|\leqslant 1$. 于是，当 $|w|\neq 1$ 时，我们有 $f(w)=w$.

因为对于 $z\in\Delta$,
$$|f_k(z)-f(z)|<1-a_k,$$
所以，$\lim\limits_{k\to\infty} f_k(z)=f(z)$ 在 Δ 上一致成立. 于是，由性质 2.2.1，对于 H 上的任一真压缩算子 A，我们有
$$\lim_{k\to\infty} \| f_k(A)-f(A) \| = 0. \tag{3.5.39}$$

由于 $f(\Delta)\subseteq\Delta$、$f_k(\Delta)\subseteq\Delta$，则对所有 $k\geqslant 1$，

$$\|f(A)\|<1,\ \|f_k(A)\|<1.$$

根据算子的 Pick 定理(定理 3.2.2)，我们得到

$$\begin{aligned}&\{I-z_kf_k(A)^*\}^{-1}\{f_k(A)^*-z_kI\}\\&\quad\cdot\{f_k(A)-z_kI\}\{I-\bar{z}_kf_k(A)\}^{-1}\\&=\{I-f_k(z_k)f_k(A)^*\}^{-1}\{f_k(A)^*-\overline{f_k(z_k)}I\}\\&\quad\cdot\{f_k(A)-f_k(z_k)I\}\{I-\overline{f_k(z_k)}f_k(A)\}^{-1}\\&\leqslant(I-z_kA^*)^{-1}(A^*-\bar{z}_kI)(A-z_kI)(I-\bar{z}_kA)^{-1}.\end{aligned}\tag{3.5.40}$$

而对于 H 上的任一真压缩算子 B 和任一复数 z，$|z|\leqslant 1$，我们有

$$\begin{aligned}&(B^*-\bar{z}I)(B-zI)\\&=(I-zB^*)(I-\bar{z}B)-(1-|z|^2)(I-B^*B).\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}&(I-zB^*)^{-1}(B^*-\bar{z}I)(B-zI)(I-\bar{z}B)^{-1}\\&=I-(1-|z|^2)(I-zB^*)^{-1}(I-B^*B)(I-\bar{z}B)^{-1},\end{aligned}\tag{3.5.41}$$

以及

$$\begin{aligned}&I-|z|^2(I-zB^*)^{-1}(B^*-\bar{z}I)(B-zI)(I-\bar{z}B)^{-1}\\&=(I-zB^*)^{-1}\{(I-zB^*)(I-\bar{z}B)\\&\quad-|z|^2(B^*-\bar{z}I)(B-zI)\}(I-\bar{z}B)^{-1}\\&=(1-|z|^2)(I-zB^*)^{-1}\{(1+|z|^2)I-\bar{z}B-zB^*\}\\&\quad\cdot(I-\bar{z}B)^{-1}.\end{aligned}\tag{3.5.42}$$

应用等式(3.5.41)和 $1-|z_k|^2>0$，我们由(3.5.40)导出

$$\begin{aligned}&\{I-z_kf_k(A)^*\}^{-1}\{I-f_k(A)^*f_k(A)\}\{I-\bar{z}_kf_k(A)\}^{-1}\\&\quad\geqslant(1-z_kA^*)^{-1}(I-A^*A)(I-\bar{z}_kA)^{-1}.\end{aligned}$$

对于上式，令 $k\to\infty$，并且应用(3.5.39)式，我们得

$$\{I-wf(A)^*\}^{-1}\{I-f(A)^*f(A)\}\{I-\bar{w}f(A)\}^{-1}$$

$$\geqslant (I-wA^*)^{-1}(I-A^*A)(I-\overline{w}A)^{-1}. \qquad (3.5.43)$$

由于(3.5.43)式两边的算子均为可逆正算子，于是(3.5.43)两边同时取逆，即得(3.5.34)中的第二个不等式.

应用等式(3.5.42)和 $1-|z_k|^2>0$，由(3.5.40)可导出

$$\{I-z_kf_k(A)^*\}^{-1}\{(1+|z_k|^2)I-\overline{z}_kf_k(A)-z_kf_k(A)^*\}$$
$$\cdot\{I-\overline{z}_kf_k(A)\}^{-1}$$
$$\geqslant (I-z_kA^*)^{-1}\{(1+|z_k|^2)I-\overline{z}_kA-z_kA^*\}(I-\overline{z}_kA)^{-1}.$$

令 $k\to\infty$，则

$$\{I-wf(A)^*\}^{-1}\{(1+|w|^2)I-\overline{w}f(A)-wf(A)^*\}$$
$$\cdot\{I-\overline{w}f(A)\}^{-1}$$
$$\geqslant (I-wA^*)^{-1}\{(1+|w|^2)I-\overline{w}A-wA^*\}(I-\overline{w}A)^{-1}.$$

因为上不等式两边的算子均为可逆正算子，所以上面不等式等价于(3.5.35)中的第二个不等式.

由于对 $\|B\|<1, |z|\leqslant 1$，等式(3.5.41)的左边为正算子，因此，

$$I\geqslant (1-|z|^2)(I-zB^*)^{-1}(I-B^*B)(I-zB)^{-1},$$

即有

$$(1-|z|^2)I\leqslant (I-\overline{z}B)(I-B^*B)^{-1}(I-zB^*). \qquad (3.5.44)$$

于是，由(3.5.44)以及 $\|f(A)\|<1$ 且 $|w|\leqslant 1$ 可知(3.5.34)中的第一个不等式成立. 由(3.5.42)可导出

$$I\geqslant (1-|z|^2)(I-\overline{z}B)\{(1+|z|^2)I-\overline{z}B-zB^*\}^{-1}$$
$$\cdot (I-zB^*). \qquad (3.5.45)$$

因此，(3.5.35)中的第一个不等式为(3.5.45)的特殊情形.

因为 $f^{[n]}(\Delta)\subseteq\Delta$，所以 $\|f^{[n]}(A)\|<1\,(n\geqslant 1)$. 由于 $f^{[n]}(A)=f(f^{[n-1]}(A))$，并且(3.5.34)对任意的真压缩算子均成立，则对 $n\geqslant 1$，我们有

$$\{I-\overline{w}f^{[n]}(A)\}\{I-f^{[n]}(A)^*f^{[n]}(A)\}^{-1}\{I-wf^{[n]}(A)^*\}$$

$$\leqslant\{I-\overline{w}f^{[n-1]}(A)\}\{I-f^{[n-1]}(A)^*f^{[n-1]}(A)\}^{-1}$$
$$\cdot\{I-wf^{[n-1]}(A)^*\}\leqslant\cdots$$
$$\leqslant(I-\overline{w}A)(I-A^*A)^{-1}(I-wA^*).$$

此即意味着

$$\|\{I-\overline{w}f^{[n]}(A)\}\{I-f^{[n]}(A)^*f^{[n]}(A)\}^{-1}\{I-wf^{[n]}(A)^*\}\|$$
$$\leqslant d(w,A). \tag{3.5.46}$$

则由引理 3.5.2，从(3.5.46)和(3.5.38)式可导出(3.5.36)以及当$|w|<1$时的(3.5.37)式．而当$|w|=1$时，(3.5.37)式亦真，此时(3.5.37)式成等式．故定理证毕． ▌

定理3.5.3 设g为开半平面Π内解析的复函数，并且$g(\Pi)\subseteq\Pi$．则或者对于H上的每一使得$\mathrm{Re}B>0$的算子B，均有不等式

$$\mathrm{Re}g(B)\geqslant\mathrm{Re}B$$

成立；或者存在一复数ω且$\mathrm{Re}\omega\geqslant0$使得对于$H$上的任一$\mathrm{Re}>0$的算子$B$，下列关系式均成立：

$$(4\mathrm{Re}\omega)I\leqslant\{g(B)+\overline{\omega}I\}\{\mathrm{Re}g(B)\}^{-1}\{g(B)^*+\omega I\}$$
$$\leqslant(B+\overline{\omega}I)(\mathrm{Re}B)^{-1}(B^*+\omega I), \tag{3.5.47}$$

$$\left\|g^{[n]}(B)-\left[\frac{\delta(\omega,B)}{2}-\overline{\omega}\right]I\right\|\leqslant\left\|B-\left[\frac{\delta(\omega,B)}{2}-\overline{\omega}\right]I\right\|$$
$$=\left\{\frac{[\delta(\omega,B)]^2}{4}-\delta(\omega,B)\cdot\mathrm{Re}\omega\right\}^{\frac{1}{2}}, \tag{3.5.48}$$

$$\|[g^{[n]}(B)-\omega I][g^{[n]}(B)+\overline{\omega}I]^{-1}\|$$
$$\leqslant\|(B-\omega I)(B+\overline{\omega}I)^{-1}\|=\left(1-\frac{4\mathrm{Re}\omega}{\delta(\omega,B)}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{3.5.49}$$

其中$n=1,2,\cdots$，并且

$$\delta(\omega,B)=\|(B+\overline{\omega}I)(\mathrm{Re}B)^{-1}(B^*+\omega I)\|. \tag{3.5.50}$$

其次，若$\mathrm{Re}\omega\neq0$，则$g(\omega)=0$.

证明 令

$$\varphi(z)=\frac{1+z}{1-z},\psi(z)=\frac{z-1}{z+1}.$$

则 φ 与 ψ 互为逆函数，并且 $\varphi(\Delta)=\Pi,\psi(\Pi)=\Delta$. 设 $f=\psi\circ g\circ\varphi$. 则 f 在 Δ 内解析且 $f(\Delta)\subset\Delta$. 于是存在一复数 w 具有定理 3.5.2 所述性质. 设 $\omega=\varphi(w)$. 考虑 H 上的算子 B，其中 $\mathrm{Re}B>0$，并且令 $A=\psi(B)$. 则 $\|A\|<1$ 且 $B=\varphi(A)$. 因为

$$f(A)=(\psi\circ g\circ\varphi)(A)=\psi(g(B)),$$

所以我们有

$$f(A)=[g(B)-I][g(B)+I]^{-1}. \tag{3.5.51}$$

从而

$$I-f(A)=2[g(B)+I]^{-1} \tag{3.5.52}$$

并且

$$I-f(A)^*f(A)=[g(B)^*+I]^{-1}\{[g(B)^*+I][g(B)+I]-[g(B)^*-I][g(B)-I]\}[g(B)+I]^{-1},$$

即

$$I-f(A)^*f(A)=4[g(B)^*+I]^{-1}[\mathrm{Re}g(B)][g(B)+I]^{-1}. \tag{3.5.53}$$

作为(3.5.52)，(3.5.53)的一个特殊情形(即 $g(z)=z=f(z)$)，我们有

$$I-A=2(B+I)^{-1}. \tag{3.5.54}$$

$$I-A^*A=4(B^*-I)^{-1}(\mathrm{Re}B)(B+I)^{-1}. \tag{3.5.55}$$

如果 $w\neq1$，则 $\omega=\varphi(w)\neq\infty$，并且

$$I-\overline{w}f(A)=\frac{1}{\overline{\omega}+1}\{(\overline{\omega}+1)[g(B)+I]-(\overline{\omega}-1)[g(B)-I]\}\cdot[g(B)+I]^{-1},$$

即

$$I-\overline{w}f(A)=\frac{2}{\overline{\omega}+1}[g(B)+\overline{\omega}I][g(B)+I]^{-1}. \tag{3.5.56}$$

特别地，

$$I-\bar{w}A=\frac{2}{\bar{\omega}+1}(B+\bar{\omega}I)(B+I)^{-1},(w\neq 1), \quad (3.5.57)$$

以及

$$1-|w|^2=\frac{4\mathrm{Re}\omega}{|\omega+1|^2},(w\neq 1). \quad (3.5.58)$$

下面分两种情形考虑：

情形 1：$w=1$.

由定理 3.5.2，我们有

$$\{I-f(A)\}\{I-f(A)^*f(A)\}^{-1}\{I-f(A)^*\}$$
$$\leqslant(I-A)(I-A^*A)^{-1}(I-A^*).$$

利用(3.5.52)，(3.5.53)，(3.5.54)以及(3.5.55)，则上不等式可变为如下不等式

$$[\mathrm{Re}g(B)]^{-1}\leqslant[\mathrm{Re}B]^{-1}$$

即不等式 $\mathrm{Re}g(B)\geqslant\mathrm{Re}B$ 成立.

情形 2：$w\neq 1$.

此时，ω 是有限的，并且 $\mathrm{Re}\omega\geqslant 0$. 由于，当 $|w|\neq 1$ 时，$f(w)=w$. 于是，当 $\mathrm{Re}\omega\neq 0$ 时，我们有 $g(\omega)=\omega$. 因此，应用(3.5.58)，(3.5.56)，(3.5.53)，(3.5.57)以及(3.5.55)，我们可以从(3.5.34)导出(3.5.47).

由于 $g^{[n]}(\Pi)\subseteq\Pi$，则对于所有 $n=1,2,\cdots$，以及 H 上的任何 $\mathrm{Re}B>0$ 的算子 B，均有 $\mathrm{Re}g^{[n]}(B)>0$. 于是，由(3.5.47)式，对于这样的算子 B，以及 $g^{[n]}(B)=g(g^{[n-1]}(B))$，我们有

$$\{g^{[n]}(B)+\bar{\omega}I\}\{\mathrm{Re}g^{[n]}(B)\}^{-1}\{g^{[n]}(B)^*+\omega I\}$$
$$\leqslant\{g^{[n-1]}(B)+\bar{\omega}I\}\{\mathrm{Re}g^{[n-1]}(B)\}^{-1}\{g^{[n-1]}(B)^*+\omega I\}$$
$$\leqslant\cdots\leqslant(B+\bar{\omega}I)(\mathrm{Re}B)^{-1}(B^*+\omega I),(n=1,2,\cdots).$$

从而，对于 $n\geqslant 1$，

$$\|\{g^{[n]}(B)+\bar{\omega}I\}\{\mathrm{Re}g^{[n]}(B)\}^{-1}\{g^{[n]}(B)^*+\omega I\}\|$$

$$\leqslant \delta(\omega, B). \qquad (3.5.59)$$

由引理 3.5.3，我们从(3.5.59)和(3.5.50)可推出(3.5.48)式，以及(3.5.49)中的 $\mathrm{Re}\omega>0$ 的情形. 当 $\mathrm{Re}\omega=0$ 时，显然(3.5.49)式亦成立，此时为等式. 定理证毕. ▌

§ 3.6

von Neumann 不等式的精确化

在 § 3.1 中，我们给出了关于算子函数的基本定理(即定理 3.1.1 或樊氏定理 1)和 von Neumann 定理(即定理 3.1.2)，并且这两个重要定理可以相互导出. 同时，我们也知道 von Neumann 不等式与 Schwarz 引理有密切的关系. 由定理 3.1.2 可将复分析中与 Schwarz 引理有关的几个经典定理推广到算子函数的情形(参见 § 3.2，§ 3.3). 在这一节，我们将给出基本定理的更为精确化的形式.

对于 $w\in\Delta$，我们以 μ_w 表示下面的函数：

$$\mu_w(z)=\frac{z-w}{1-\overline{w}z}, z\in\Delta. \qquad (3.6.1)$$

对于某一 $w\in\Delta$ 和常数 η 且 $|\eta|=1$，我们称 $\eta\mu_w$ 是 Möbius 变换. 因为 $\mu_w(\Delta)\subseteq\Delta$，所以，由基本定理，对于任意的 $w\in\Delta$ 和 H 上的真压缩算子 A，我们有

$$\|\mu_w(A)\|<1, \qquad (3.6.2)$$

其中 $\mu_w(A)=(A-wI)(I-\overline{w}A)^{-1}$. 在下面的定理证明中我们将多次用到 § 3.5 中的引理 3.5.1.

定理 3.6.1　设 f 在 Δ 内解析且 $f(\Delta)\subseteq\Delta$. 则对于 Hilbert 空间 H 上的任意真压缩算子 A 和 $w\in\Delta$，我们有

$$\left\|f(A)-\frac{(1-\|\mu_w(A)\|^2)f(w)}{1-\|\mu_w(A)\|^2\cdot|f(w)|^2}I\right\|$$

$$\leqslant \frac{\| \mu_w(A) \| (1-|f(w)|^2)}{1-\| \mu_w(A) \|^2 \cdot |f(w)|^2} \tag{3.6.3}$$

和

$$\| f(A) \| \leqslant \frac{\| \mu_w(A) \| + |f(w)|}{1+\| \mu_w(A) \| \cdot |f(w)|} < 1. \tag{3.6.4}$$

(3.6.3)式的等式成立当且仅当 $A=wI$ 或 f 是 Möbius 变换.

证明 在定理的假设下，由 Pick 定理(定理 3.2.3)，我们有

$$\| \mu_{f(w)}(f(A)) \| \leqslant \| \mu_w(A) \|, \tag{3.6.5}$$

并且(3.6.5)式的等式成立当且仅当 $A=wI$ 或 f 是 Möbius 变换. 因此，不等式(3.6.3)及其等式成立的条件由(3.6.5)式应用引理 3.5.1 于 $B=f(A)$，$z=f(w)$，$\rho=\| \mu_w(A) \|$ 而得.

由(3.6.3)式通过三角不等式，我们得到

$$\| f(A) \| \leqslant \frac{\| \mu_w(A) \| (1-|f(w)|^2)+(1-\| \mu_w(A) \|^2)|f(w)|}{1-\| \mu_w(A) \|^2 \cdot |f(w)|^2}$$

$$=\frac{\| \mu_w(A) \| + |f(w)|}{1-\| \mu_w(A) \| \cdot |f(w)|}.$$

于是，由(3.6.2)以及 $|f(w)|<1$，$\| f(A) \|$ 的上确界严格小于 1，即(3.6.4)式成立.

特别地，当 $w=0$ 时，(3.6.4)式简化为

$$\| f(A) \| \leqslant \frac{\| A \| + |f(0)|}{1+\| A \| \cdot |f(0)|} < 1.$$

故定理得证. ∎

推论 3.6.1 设 f 在 Δ 内解析且 $f(\Delta)\subseteq\Delta$，$f(0)=0$. 则对 H 上的任一真压缩算子 A 以及 Δ 内任一 $w\neq 0$，不等式

$$\left\| f(A)-\frac{(1-\| \mu_w(A) \|^2)w^{-1}f(w)}{1-\| \mu_w(A) \|^2 \cdot |w^{-1}f(w)|^2}A \right\|$$

$$\leqslant \frac{\| \mu_w(A) \| (1-|w^{-1}f(w)|^2)}{1-\| \mu_w(A) \|^2 \cdot |w^{-1}f(w)|^2} \| A \|, \tag{3.6.6}$$

以及

$$\| f(A) \| \leqslant \frac{\| \mu_w(A) \| + |w^{-1}f(w)|}{1+\| \mu_w(A) \| \cdot |w^{-1}f(w)|} \| A \|, \tag{3.6.7}$$

成立；此外当 $w=0$ 时，我们有

$$\left\| f(A)-\frac{(1-\|A\|^2)f'(0)}{1-\|A\|^2\cdot|f'(0)|^2}A\right\| \leqslant\frac{1-|f'(0)|^2}{1-\|A\|^2\cdot|f'(0)|^2}\|A\| \tag{3.6.8}$$

以及

$$\|f(A)\|\leqslant\frac{\|A\|+|f'(0)|}{1+\|A\|\cdot|f'(0)|}\|A\|. \tag{3.6.9}$$

证明　显然，若 $f(z)=\eta z$，其中 η 为常数且 $|\eta|=1$，则 (3.6.6)，(3.6.7)，(3.6.8)，以及(3.6.9)均为平凡的等式.

现不妨假设 f 不为 ηz 之形式，其中 $|\eta|=1$. 定义 Δ 上的函数 g：

$$g(z)=z^{-1}f(z),z\neq0;g(0)=f'(0).$$

则 $g(z)$ 为 Δ 内的解析函数且 $g(\Delta)\subseteq\Delta$. 应用定理 3.6.1 于函数 g 并且利用 $f(A)=g(A)A$，推论获证. ▌

推论 3.6.1 是算子 Schwarz 引理的更精确形式，即除非 $A=0$ 或 $f(z)=\eta z$ 且 $|\eta|=1$，不等式(3.6.7)和(3.6.9)比 $\|f(A)\|\leqslant\|A\|$ 更为精确. 事实上，如果 $f(z)\neq\eta z$，其中 $|\eta|=1$，则对于 $0\neq w\in\Delta$，我们有

$$|w^{-1}f(w)|<1 \text{ 以及 } |f'(0)|<1;$$

因此

$$\frac{\|\mu_w(A)\|+|w^{-1}f(w)|}{1+\|\mu_w(A)\|\cdot|w^{-1}f(w)|}<1,0\neq w\in\Delta,$$

并且

$$\frac{\|A\|+|f'(0)|}{1+\|A\|\cdot|f'(0)|}<1.$$

下面的定理 3.6.2 是不等式(3.6.3)和(3.6.4)的进一步精确化. 设 f 在 Δ 内解析且 $f(\Delta)\subseteq\Delta$，A 为 H 上的真压缩算子. 对于 $w,z\in\Delta,w\neq z$，我们引入以下记号：

$\alpha(f,A,w,z)$

$$=\frac{\|\mu_w(A)\|+|\mu_w(z)|^{-1}\cdot|\mu_{f(w)}(f(z))|}{1+\|\mu_w(A)\|\cdot|\mu_u(z)|^{-1}\cdot|\mu_{f(w)}(f(z))|},\tag{3.6.10}$$

以及

$$\alpha(f,A,w)$$
$$=\frac{\|\mu_w(A)\|+(1-|w|^2)(1-|f(w)|^2)^{-1}\cdot|f'(w)|}{1+\|\mu_w(A)\|(1-|w|^2)(1-|f(w)|^2)^{-1}|f'(w)|}.\tag{3.6.11}$$

由于

$$\lim_{z\to w}\frac{\mu_{f(w)}(f(z))}{\mu_w(z)}=\frac{1-|w|^2}{1-|f(w)|^2}f'(w),$$

则有

$$\lim_{z\to w}\alpha(f,A,w,z)=\alpha(f,A,w).\tag{3.6.12}$$

应该注意到：除非 f 是 Möbius 变换，我们都有

$$|\mu_{f(w)}(f(z))|<|\mu_w(z)|,w\neq z\in\Delta,$$

并且

$$\frac{1-|w|^2}{1-|f(w)|^2}|f'(w)|<1,w\in\Delta.$$

于是，由以上事实与 $\|\mu_z(A)\|<1(\|A\|<1,z\in\Delta)$，不等式

$$\alpha(f,A,w,z)<1,w\neq z\in\Delta,\tag{3.6.13}$$

以及

$$\alpha(f,A,w)<1,w\in\Delta\tag{3.6.14}$$

成立，除非 f 是 Möbius 变换.

定理3.6.2　设 f 在 Δ 内解析且 $f(\Delta)\subseteq\Delta$，并且 A 为 Hilbert 空间 H 上的真压缩算子. 则对任一 $w\in\Delta$，应有不等式

$$\|\mu_{f(w)}(f(A))\|\leqslant\alpha\|\mu_w(A)\|,\tag{3.6.15}$$

$$\left\|f(A)-\frac{(1-\alpha^2\|\mu_w(A)\|^2)f(w)}{1-\alpha^2\|\mu_w(A)\|^2|f(w)|^2}I\right\|$$
$$\leqslant\frac{\alpha\|\mu_w(A)\|(1-|f(w)|^2)}{1-\alpha^2\|\mu_w(A)\|^2\cdot|f(w)|^2},\tag{3.6.16}$$

以及

$$\|f(A)\| \leqslant \frac{\alpha\|\mu_w(A)\|+|f(w)|}{1+\alpha\|\mu_w(A)\|\cdot|f(w)|}, \qquad (3.6.17)$$

其中 α 可取为 $\alpha=\alpha(f,A,w,z)(z\in\Delta,z\neq w)$，或 $\alpha=\alpha(f,A,w)$.

在证明定理之前，让我们比较一下(3.6.15)，(3.6.16)，(3.6.17)与相对应的(3.6.5)，(3.6.3)，(3.6.4). 我们已经知道，除非 f 是 Möbius 变换，否则 $\alpha<1$. 因为 $\mu_w(A)=(A-wI)(I-\overline{w}A)^{-1}$，故 $\|\mu_w(A)\|=0$ 当且仅当 $A=wI$. 若 $A\neq wI$ 且 f 不是 Möbius 变换，则(3.6.15)，(3.6.17)比相对应的(3.6.5)，(3.6.4)更为精细；而(3.6.16)的右边小于(3.6.3)的右边. 从而，(3.6.16)给出了优于(3.6.3)的 $f(A)$ 之逼近.

证明 考虑 Δ 内的两个相异点 z,w. 令

$$v=\mu_w(z) \qquad (3.6.18)$$

以及

$$g=\mu_{f(w)}\circ f\circ\mu_{-w}. \qquad (3.6.19)$$

则我们有

$$\mu_v\circ\mu_w=\frac{1+\overline{w}v}{1+w\overline{v}}\mu_z \qquad (3.6.20)$$

并且

$$g'(0)=\frac{1-|w|^2}{1-|f(w)|^2}f'w. \qquad (3.6.21)$$

因为 μ_{-w} 是 μ_w 的反函数，故

$$g\circ\mu_w=\mu_{f(w)}\circ f. \qquad (3.6.22)$$

从而

$$g(v)=(g\circ\mu_w)(z)=\mu_{f(w)}(f(z)). \qquad (3.6.23)$$

任给 H 上的真压缩算子 A，令

$$B=\mu_w(A). \qquad (3.6.24)$$

则由(3.6.24)，(3.6.22)以及(3.6.20)，我们得到

$$g(B)=(g\circ\mu_w)(A)=\mu_{f(w)}(f(A)) \qquad (3.6.25)$$

以及

$$\|\mu_v(B)\| = \|(\mu_v \circ \mu_w)(A)\|$$
$$= \|\mu_z(A)\|. \qquad (3.6.26)$$

由 $\|B\|<1$, g 在 Δ 内解析且 $g(\Delta)\subseteq\Delta$, $g(0)=0$, $v\neq 0$(因为 $w\neq z$),应用(3.6.7)和(3.6.9)式可得

$$\|g(B)\| \leqslant \frac{\|\mu_v(B)\| + |v^{-1}g(v)|}{1+\|\mu_v(B)\|\cdot|v^{-1}g(v)|}\|B\|, \qquad (3.6.27)$$

以及

$$\|g(B)\| \leqslant \frac{\|B\| + |g'(0)|}{1+\|B\|\cdot|g'(0)|}\|B\|. \qquad (3.6.28)$$

因此,由(3.6.26),(3.6.18),(3.6.23),(3.6.13),并且应用(3.6.24),(3.6.21),(3.6.14),我们得到

$$\frac{\|\mu_v(B)\| + |v^{-1}g(v)|}{1+\|\mu_v(B)\|\cdot|v^{-1}g(v)|} = \alpha(f,A,w,z). \qquad (3.6.29)$$

类似可得

$$\frac{\|B\| + |g'(0)|}{1+\|B\|\cdot|g'(0)|} = \alpha(f,A,w). \qquad (3.6.30)$$

于是,对于 $\alpha=\alpha(f,A,w,z)$,其中 $w\neq z\in\Delta$,(3.6.27)即为(3.6.15);对于 $\alpha=\alpha(f,A,w)$,(3.6.28)即为(3.6.15). 从而(3.6.15)得证.

由引理 3.5.1 知(3.6.15)与(3.6.16)是等价的. 因此,利用三角不等式,由(3.6.16)推得(3.6.17). 故定理证毕. ∎

我们已经看到不等式(3.6.9)精细化了算子 Schwarz 引理中的不等式 $\|f(A)\|\leqslant\|A\|$. 下面的推论作为定理 3.6.2 的特殊情形,将使(3.6.9)式更为精细化.

推论 3.6.2 设 f 在 Δ 内解析且 $f(\Delta)\subseteq\Delta$, $f(0)=0$,并且 $f(z)\neq\eta z$,其中 η 为 $|\eta|=1$ 的常量. 则对于 Hilbert 空间 H 上的任一真压缩算子 A,我们有

$$\|f(A)\| \leqslant \frac{\beta\|A\| + |f'(0)|}{1+\beta\|A\|\cdot|f'(0)|}\|A\|, \qquad (3.6.31)$$

其中

$$\beta=\frac{\|A\|+|f''(0)|\cdot 2^{-1}(1-|f'(0)|^2)^{-1}}{1+\|A\|\cdot|f''(0)|\cdot 2^{-1}(1-|f'(0)|^2)^{-1}}. \tag{3.6.32}$$

证明 在 Δ 内定义函数 g：

$$g(z)=z^{-1}f(z),0\neq z\in\Delta \text{ 且 } g(0)=f'(0).$$

则 g 在 Δ 内解析且 $g(\Delta)\subseteq\Delta$（因为 $f(z)\neq\eta z,|\eta|=1$）. 应用(3.6.17)式 $w=0$ 的特殊情形于 g，我们有

$$\|g(A)\|\leqslant\frac{\alpha\|A\|+|g(0)|}{1+\alpha\|A\|\cdot|g(0)|},\ \|A\|<1, \tag{3.6.33}$$

其中

$$\alpha=\alpha(g,A,0)=\frac{\|A\|+|g'(0)|(1-|g(0)|^2)^{-1}}{1+\|A\|\cdot|g'(0)|(1-|g(0)|^2)^{-1}}. \tag{3.6.34}$$

因为 $g(0)=f'(0),g'(0)=f''(0)/2$，所以 $\alpha=\alpha(g,A,0)$ 即为(3.6.32)所给之 β. 因此，由(3.6.33)以及 $\|f(A)\|=\|g(A)A\|\leqslant\|g(A)\|\cdot\|A\|$，我们得到(3.6.31)式.

比较(3.6.31)与(3.6.9)，并且注意到等式：

$$\frac{\|f''(0)\|}{2(1-|f'(0)|^2)}=\frac{|g'(0)|}{1-|g(0)|^2}$$

的左边<1，除非 g 是 Möbius 变换. 因此，除非 $f(z)=zg(z)$，其中 g 为 Möbius 变换，我们有 $\beta<1$. 故在推论 3.6.2 的假设条件下（除去 $f(z)=\eta z,|\eta|=1$ 的情形），不等式(3.6.31)较强于推论 3.6.1 的(3.6.9)，除非 $A=0$ 或 $f(z)=zg(z)$，其中 g 为 Möbius 变换. 从而推论得证. ∎

推论 3.6.3 设 f 在 Δ 内解析且 $f(\Delta)\subseteq\Delta$. 如果 A 为 Hilbert 空间 H 上的真压缩算子且 $f(A)=0$，则对任一 $w\in\Delta$，我们有

$$\|\mu_w(A)\|\geqslant\left\{|f(w)|+\left[\frac{(1-|w|^2)|f'(w)|}{2(1+|f(w)|}\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}}-\frac{(1-|w|^2)|f'(w)|}{2(1+|f(w)|)}. \tag{3.6.35}$$

此处右端$\geqslant|f(w)|$；它等于$|f(w)|$只在$f(w)=0$或f为Möbius变换时发生.

证明 因为$f(A)=0$，所以

$$\|\mu_{f(w)}(f(A))\|=|f(w)|.$$

于是，由定理3.6.2的不等式(3.6.15)可得

$$|f(w)|\leqslant\alpha(f,A,w)\|\mu_w(A)\|.$$

又由(3.6.11)，即$\alpha(f,A,w)$的定义，代入上式得

$$|f(w)|\left\{1+\|\mu_w(A)\|\frac{(1-|w|^2)|f'(w)|}{1-|f(w)|^2}\right\}$$
$$\leqslant\|\mu_w(A)\|\left\{\|\mu_w(A)\|+\frac{(1-|w|^2)|f'(w)|}{1-|f(w)|^2}\right\},$$

而此不等式可重写为(3.6.35).

易证(3.6.35)的右端$\geqslant|f(w)|$等价于

$$|f(w)|\cdot\left\{1-\frac{1-|w|^2}{1-|f(w)|^2}|f'(w)|\right\}\geqslant 0.$$

此不等式左端的第二个因子$\geqslant 0$，并且它等于零的条件只当f为Möbius变换. 这就完成了推论的证明. ∎

注意在$A=zI, z\in\Delta$，应有$f(A)=f(z)I$，故$\|f(A)\|=|f(z)|$. 因此，当$A=zI, z\in\Delta$时，定理3.6.2就转化为不含算子的复值解析函数情况的结论.

第 四 章

Harnack 不等式的算子化

本章将继续论述樊氏关于算子函数的基本理论. 我们将致力于(在算子意义下的)几种 Harnack 型不等式的建立；之后，还要证明算子解析函数的优势原理；最后，讨论具有负系数的 p-叶算子解析函数的特殊性质.

§ 4.1

两个典型的 Harnack 不等式

在§3.2中，我们已将经典的 Harnack 不等式推广到算子情形(推论 3.2.3). 现在，我们要给出由樊墈建立的两个典型的 Harnack 不等式[51]，即定理 4.1.1 和定理 4.1.2. 在证明这两个定理之前，我们需要下面的两个引理.

引理 4.1.1 设 A 为 Hilbert 空间 H 上的真压缩算子且 $0<\rho<1$. 则不等式

$$\left\| (I+A)(I-A)^{-1}-\frac{1+\rho^2}{1-\rho^2}I \right\| \leqslant \frac{2\rho}{1-\rho^2} \tag{4.1.1}$$

成立当且仅当 $\|A\| \leqslant \rho$.

证明 不等式(4.1.1)等价于

$$\left[(I-A^*)^{-1}(I+A^*)-\frac{1+\rho^2}{1-\rho^2}I\right]\left[(I+A)(I-A)^{-1}-\frac{1+\rho^2}{1-\rho^2}I\right]$$
$$\leqslant\frac{4\rho^2}{(1-\rho^2)^2}I,$$

上式可写为

$$(I+A^*)(I+A)+\left(\frac{1+\rho^2}{1-\rho^2}\right)^2(I-A^*)(I-A)$$
$$-\frac{1+\rho^2}{1-\rho^2}\{(I-A^*)(I+A)+(I+A^*)(I-A)\}$$
$$\leqslant\frac{4\rho^2}{(1-\rho^2)^2}(I-A^*)(I-A),$$

或者

$$(1-\rho^2)^2(I+A^*)(I+A)+(1+\rho^2)^2(I-A^*)(I-A)$$
$$-2(1+\rho^2)(1-\rho^2)(I-A^*A)\leqslant 4\rho^2(I-A^*)(I-A)$$

此不等式又可写为

$$(1-\rho^2)\{(I+A^*)(I+A)+(I-A^*)(I-A)\}$$
$$\leqslant 2(1+\rho^2)(I-A^*A),$$

或者

$$(1-\rho^2)(I+A^*A)\leqslant(1+\rho^2)(I-A^*A),$$

即 $A^*A\leqslant\rho^2I$，亦即 $\|A\|\leqslant\rho$. 因此，(4.1.1)等价于 $\|A\|\leqslant\rho$. ▮

引理 4.1.2 设 A 为 Hilbert 空间上的线性算子. 如果 $\|A\|\leqslant\rho<1$，则

$$\mathrm{Re}A(I-A)^{-1}\geqslant-\frac{\rho}{1+\rho}I. \tag{4.1.2}$$

等式成立当且仅当 $A=-\rho I$.

证明 因为

$$\mathrm{Re}A(I-A)^{-1}$$
$$=\frac{1}{2}(I-A^*)^{-1}\{(I-A^*)A+A^*(I-A)\}(I-A)^{-1}$$
$$=(I-A^*)^{-1}(\mathrm{Re}A-A^*A)(I-A)^{-1},$$

所以，(4.1.2)式等价于

$$\mathrm{Re}A - A^*A \geqslant -\frac{\rho}{1+\rho}(I-A^*)(I-A)$$

或者

$$\rho I - A^*A + (1-\rho)\mathrm{Re}A \geqslant 0,$$

此不等式亦可写为

$$(\rho^2 I - A^*A) + (1-\rho)(\rho I + \mathrm{Re}A) \geqslant 0. \qquad (4.1.3)$$

由于$\|A\| \leqslant \rho < 1$，于是，我们有

$$\rho^2 I - A^*A \geqslant 0,$$

$$-\mathrm{Re}A \leqslant \|A\| I \leqslant \rho I.$$

则(4.1.3)成立. 而(4.1.2)与(4.1.3)等价. 因此(4.1.2)成立. 显然(4.1.3)的等式成立当且仅当

$$\rho^2 I - A^*A = 0 \text{且} \rho I + \mathrm{Re}A = 0.$$

换言之，(4.1.2)的等式成立当且仅当$A = -\rho I$. 故引理获证. ▌

定理4.1.1 设A为Hilbert空间H上的真压缩算子，n为正整数，g在Δ内解析且$\mathrm{Re}g(z) > 0$，$g(0) = 1$，$g'(0) = \cdots = g^{(n-1)}(0) = 0 (n \geqslant 2)$. 则

$$\left\| g(A) - \frac{1+\|A^n\|^2}{1-\|A^n\|^2} I \right\| \leqslant \frac{2\|A^n\|}{1-\|A^n\|^2}, \qquad (4.1.4)$$

$$\frac{1-\|A^n\|}{1+\|A^n\|} I \leqslant \mathrm{Re}g(A) \leqslant \frac{1+\|A^n\|}{1-\|A^n\|} I, \qquad (4.1.5)$$

$$-\frac{2\|A^n\|}{1-\|A^n\|^2} I \leqslant \mathrm{Im}g(A) \leqslant \frac{2\|A^n\|}{1-\|A^n\|^2} I. \qquad (4.1.6)$$

证明 定义函数f如下：

$$f(z) = \frac{g(z)-1}{g(z)+1}.$$

于是，f在Δ内解析且$f(\Delta) \subseteq \Delta$，$f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n-1)}(0) = 0$. 由推论3.2.2(算子化的Schwarz引理)，我们有

$$\|f(A)\| \leqslant \|A^n\|.$$

由引理4.1.1，上不等式即为

$$\left\| (I+f(A))(I-f(A))^{-1} - \frac{1+\|A^n\|^2}{1-\|A^n\|^2} I \right\| \leqslant \frac{2\|A^n\|}{1-\|A^n\|^2},$$

此不等式即是(4.1.4)式(因为 $g(z)=\frac{1+f(z)}{1-f(z)}$ 以及 $g(A)=(I+f(A))(I-f(A))^{-1}$).

由(4.1.4)式,我们可导出

$$\pm\mathrm{Re}\left[g(A)-\frac{1+\|A^n\|^2}{1-\|A^n\|^2}I\right]\leqslant\left\|g(A)-\frac{1+\|A^n\|^2}{1-\|A^n\|^2}I\right\|\cdot I$$
$$\leqslant\frac{2\|A^n\|}{1-\|A^n\|^2}I.$$

因此,(4.1.5)成立. 类似地,(4.1.6)式可由下面不等式得到

$$\pm\mathrm{Im}g(A)=\pm\mathrm{Im}\left[g(A)-\frac{1+\|A^n\|^2}{1-\|A^n\|^2}I\right]$$
$$\leqslant\left\|g(A)-\frac{1+\|A^n\|^2}{1-\|A^n\|^2}\right\|\cdot I\leqslant\frac{2\|A^n\|}{1-\|A^n\|^2}I.$$

定理证毕. ▌

定理4.1.2 设 f 在 $\{z;|z|<\rho\}$ 内解析,β 是一实数,并且

$$\mathrm{Re}f(z)<\beta,\ |z|<\rho. \tag{4.1.7}$$

则对 Hilbert 空间 H 上的每一具有 $\|A\|<\rho$ 的算子 A,我们有

$$\mathrm{Re}f(A)\leqslant\left\{\frac{\rho-\|A\|}{\rho+\|A\|}\mathrm{Re}f(0)+\frac{2\|A\|}{\rho+\|A\|}\beta\right\}\cdot I. \tag{4.1.8}$$

(4.1.8)等式成立当且仅当 $A=0$;或 A 及 f 具有如下形式:

$$A=-\bar{\eta}\alpha I, \tag{4.1.9}$$

$$f(z)=\frac{\rho w_0+(\overline{w}_0-2\beta)\eta z}{\rho-\eta z}, \tag{4.1.10}$$

其中 $|\eta|=1$, $0<\alpha<\rho$ 且 $\mathrm{Re}w_0<\beta$.

证明 在 Δ 上定义函数 φ 如下:

$$\varphi(z)=f(0)+2[\mathrm{Re}f(0)-\beta]\frac{z}{1-z}.$$

则 φ 在 Δ 内单叶解析. 由于

$$|z|<1\Leftrightarrow 1+2\mathrm{Re}\,\frac{z}{1-z}>0$$

并且 $\mathrm{Re}f(0)=\beta$,我们得到

$$|z|<1\Leftrightarrow\mathrm{Re}\varphi(z)<\beta.$$

定义函数 g：

$$g(z)=\varphi^{-1}\circ f(\rho z),z\in\Delta.$$

则 g 在 Δ 内解析且 $g(\Delta)\subseteq\Delta$，$g(0)=0$. 由推论3.2.2(算子 Schwarz 引理)，对于 H 上的真压缩算子，我们有 $\|g(B)\|\leqslant\|B\|$，所以

$$\|\varphi^{-1}\circ f(\rho B)\|\leqslant\|B\|,\|B\|<1,$$

或者

$$\|\varphi^{-1}\circ f(A)\|\leqslant\frac{\|A\|}{\rho},\|A\|<\rho. \tag{4.1.11}$$

根据引理4.1.2，我们有

$$\mathrm{Re}C(I-C)^{-1}\geqslant\frac{\|C\|}{1+\|C\|}I,\|C\|<1.$$

因此，对于任一真压缩算子 C，都有

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\varphi(C)&=[\mathrm{Re}f(0)]\cdot I+2[\mathrm{Re}f(0)-\beta]\cdot\mathrm{Re}C(I-C)^{-1}\\&\leqslant[\mathrm{Re}f(0)]\cdot I-2[\mathrm{Re}f(0)-\beta]\frac{\|C\|}{1+\|C\|}\cdot I.\end{aligned} \tag{4.1.12}$$

对于 $\|A\|<\rho$，取 $C=\varphi^{-1}\circ f(A)$. 则由(4.1.11)，

$$\|C\|\leqslant\frac{\|A\|}{\rho},$$

从而

$$\frac{\|C\|}{1+\|C\|}\leqslant\frac{\|A\|}{\rho+\|A\|}. \tag{4.1.13}$$

由 $\varphi(C)=f(A)$ 以及(4.1.12)，(4.1.13)得不等式(4.1.8).

现证(4.1.8)的等号成立的情形. 显然，当 $A=0$ 时，(4.1.8)的等号成立. 假设对某个算子 $A\neq0$ 且 $\|A\|<\rho$，(4.1.8)的等号成立，则必有(4.1.13)的等号成立，从而 $\|C\|=\frac{\|A\|}{\rho}$，即

$$\left\|g\left(\frac{A}{\rho}\right)\right\|=\|\varphi^{-1}\circ f(A)\|=\frac{\|A\|}{\rho}.$$

由于 $A\neq0$，因此，上式只有当 $g(z)=\eta z$ 时才能成立，其中 η 是 $|\eta|=1$ 的常数(推论3.2.2). 于是

$$f(\rho z)=\varphi\circ g(z)=\varphi(\eta z)$$

或者

$$f(z)=\varphi\left(\frac{\eta}{\rho}z\right)=f(0)+2[\mathrm{Re}f(0)-\beta]\frac{\eta z}{\rho-\eta z}, \quad (4.1.14)$$

此即为(4.1.10)式，其中 $w_0=f(0)$. 由(4.1.14)我们得

$$\mathrm{Re}f(A)$$
$$=[\mathrm{Re}f(0)]\cdot I+2[\mathrm{Re}f(0)-\beta]\cdot\mathrm{Re}\eta A(\rho I-\eta A)^{-1}. \quad (4.1.15)$$

而(4.1.8)式中的等式可写为

$$\mathrm{Re}f(A)=[\mathrm{Re}f(0)]\cdot I-2[\mathrm{Re}f(0)-\beta]\frac{\|A\|}{\rho+\|A\|}I,$$

并比较此式与(4.1.15)式可得

$$\mathrm{Re}\eta A(\rho I-\eta A)^{-1}=-\frac{\|A\|}{\rho+\|A\|}I. \quad (4.1.16)$$

因为$\|A\|<\rho$，所以，由引理4.1.2，推得 $\eta A=-\|A\|\cdot I$，即算子 A 具有(4.1.9)的形式，其中$0<\alpha<\rho$. 因此，如果对于某个算子 $A\neq 0$ 且$\|A\|<\rho$，(4.1.8)式的等号成立，则 A 和 f 必分别具有(4.1.9)和(4.1.10)的形式，其中$|\eta|=1$，$0<\alpha<\rho$ 且 $\mathrm{Re}w_0<\beta$. 反之，对于这种形式的算子 A 和函数 f，也容易验证(4.1.8)式的等号成立. 定理证毕. ▌

§4.2

算子解析函数的优势原理

设 $f(z)$和 $g(z)$为 Δ 内的解析函数. 我们说函数 $g(z)$优于 $f(z)$，对于任一 $z\in\Delta$ 均有$|f(z)|\leqslant|g(z)|$. Macgregor T H 利用 Carathéodory 不等式证明了如下定理.

定理4.2.1 设 $f(z)$和 $g(z)$在 Δ 内解析，$g(0)=0$，并且在 Δ 内 $g(z)$优于 $f(z)$，即$|f(z)|\leqslant|g(z)|$，$(z\in\Delta)$.

(i)　如果$0\leqslant r\leqslant\sqrt{2}-1$，则

$$\max_{|z|=r}|f'(z)|\leqslant\max_{|z|=r}|g'(z)|.$$

(ii)　如果$g(z)$在Δ内为单叶的，则$g'(z)$优于$f'(z)$，其中$|z|<2-\sqrt{3}$.

(iii)　如果$g(z)$一一地、到上地映照Δ到一个凸域，则$g'(z)$优于$f'(z)$，其中$|z|<\frac{1}{3}$.

在这一节，我们将给出在算子意义下的类似结果[5]. 在证明我们的定理之前，我们需要下面两个引理.

引理4.2.1　设$f(z)$，$g(z)$在Δ内解析，并且$|f(z)|\leqslant|g(z)|$，$(z\in\Delta)$. 则存在Δ内的解析函数$\varphi(z)$使得$\|\varphi(A)\|<1$且$f(A)=\varphi(A)g(A)$，其中A为Hilbert空间H上的真压缩算子.

证明　设z_0是$g(z)$的一个零点. 则除了平凡的情形$g(z)\equiv0$外，对于z_0的近邻的点z，$g(z)$有幂级数展开式：

$$g(z)=b_k(z-z_0)^k+b_{k+1}(z-z_0)^{k+1}+\cdots,$$

其中$k\geqslant1$且$b_k\neq0$. 因此，如果r充分小，则对于$|z-z_0|<r$，我们有

$$|g(z)|\leqslant2|b_k|\cdot|z-z_0|^k.$$

我们可将$f(z)$在z_0的近邻展成幂级数：

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n,$$

并且对任一充分小的$\rho>0$，均有

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=\rho}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz.$$

因此，若$\rho\leqslant r$，则

$$\begin{aligned}|a_n|&\leqslant\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\max\limits_{|z-z_0|=\rho}|f(z)|}{\rho^{n+1}}\cdot2\pi\rho\\&\leqslant\frac{1}{\rho^n}\cdot\max_{|z-z_0|=\rho}|g(z)|\leqslant2|b_k|\cdot\rho^{k-n}.\end{aligned}$$

令 $\rho\to 0$，由上不等式可知，对于 $n<k$，$a_n=0$. 即 $f(z)$ 在 z_0 处与 $g(z)$ 至少有相同的零点阶数. 从而，函数 $\varphi(z)=\dfrac{f(z)}{g(z)}$ 在 Δ 内解析. 由于

$$|\varphi(z)|=\left|\frac{f(z)}{g(z)}\right|\leqslant 1.$$

于是，由基本定理（定理3.1.1），对于 H 上的任一真压缩算子 A，$\|\varphi(A)\|\leqslant 1$. 显然，$f(A)=\varphi(A)\cdot g(A)$. 故引理得证. ∎

下面的引理4.2.2实际上是经典的 Carathéodory 不等式的算子化，关于它的证明可分别见[5]和[13].

引理4.2.2 设 $\varphi(z)$ 在 Δ 内解析且 $|\varphi(z)|<1$，$(z\in\Delta)$. 则对于 Hilbert 空间 H 上的任一真压缩算子 A，当 $A^*A=AA^*$ 时，我们有

$$\|\varphi'(A)\|\leqslant\frac{\|I-\varphi(A)^*\varphi(A)\|}{1-\|A\|^2}.$$

证明 令

$$\psi(z)=(A+zI)(I+zA^*)^{-1},z\in\Delta.$$

则我们有

$$\|\psi(z)\|=\|(A+zI)(I+zA^*)^{-1}\|<1,z\in\Delta. \tag{4.2.1}$$

事实上，$\|\psi(z)\|<1$ 当且仅当 $\psi(z)^*\psi(z)<I$. 于是只须证明 $\psi(z)^*\psi(z)<I$. 若不然，$\psi(z)^*\psi(z)\geqslant I$，则有

$$((A+zI)(I+zA^*)^{-1})^*((A+zI)(I+zA^*)^{-1})\geqslant I.$$

或者

$$(I+|z|^2A^*A+zA^*+\bar{z}A)^{-1}(A^*A+|z|^2I+zA^*+\bar{z}A)\geqslant I,$$

即

$$A^*A+|z|^2I+zA^*+\bar{z}A\geqslant I+|z|^2A^*A+zA^*+\bar{z}A,$$

亦即

$$(I-A^*A)(1-|z|^2)\leqslant 0.$$

而对于 $|z|<1$，上面不等式等价于 $I-A^*A\leqslant 0$，此不等式与 $\|A\|<1$ 矛盾. 故 $\|\psi(z)\|<1$，$(z\in\Delta)$.

由于$|\varphi(z)|<1$,$(z\in\Delta)$,于是由基本定理,对任一真压缩算子A,$\|\varphi(A)\|<1$. 则

$$\|\varphi(\psi(z))\|=\|\varphi((A+zI)(I+zA^*)^{-1})\|<1.$$

令

$$F(z)=(\varphi(\psi(z))-\varphi(A))((I-\varphi(A)^*\varphi(\psi(z)))^{-1}. \tag{4.2.2}$$

则算子值函数$F(z)$在Δ内解析,$\|F(z)\|<1$且$F(0)=0$. 为此,我们分三步证明:

1°. 往证$\varphi((A+zI)(I+zA^*)^{-1})$在$\Delta$内解析. 我们只须证明在$z=0$处的解析性,而对$z\neq0$处的解析性类似可得.

设$\varphi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$,$(z\in\Delta)$. 于是,

$$\begin{aligned}
&\varphi(\psi(z))-\varphi(A)\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\{((A+zI)(I+zA^*)^{-1})^n-A^n\}\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}a_n[(I+zA^*)^{-1}]^n\cdot[(A+zI)^n-(A+zA^*A)^n]\\
&=z(I-A^*A)\sum_{n=1}^{\infty}a_n[(I+zA^*)^{-1}]^n\\
&\quad\cdot\{(A+zI)^{n-1}+(A+zI)^{n-2}(A+zA^*A)+\cdots+\\
&\quad+(A+zI)(A+zA^*A)^{n-2}+(A+zA^*A)^{n-1}\}.
\end{aligned} \tag{4.2.3}$$

当$\|A\|=r<1$时,取$\delta>0$使$r<\delta<1$,则在$|\zeta|\leqslant\delta$上有$\sum_{n=0}^{\infty}a_n\zeta^n$一致收敛于$\varphi(\zeta)$,从而$\sum_{n=0}^{\infty}a_nA^n$一致收敛于$\varphi(A)$. 对于$\delta$,存在$\sigma>0$,当$|z|\leqslant\sigma$,$|\zeta|\leqslant r$时,有

$$\left|\frac{\zeta+z}{1+\bar{\zeta}z}\right|<\delta,\ \|(A+zI)(I+zA^*)^{-1}\|<\delta.$$

故级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n[(A+zI)(I+zA^*)^{-1}]^n$$

关于 $z(|z|\leqslant\sigma)$一致收敛于 $\varphi(\psi(z))$. 于是, $\forall\ \epsilon'>0$, $\exists\ N>0$, 当 $n,m>N$ 时, 对一切 $|z|\leqslant\sigma$, 都有

$$\left\|\sum_{j=n}^{m} a_j[(A+zI)(I+zA^*)^{-1}]^j-\sum_{j=n}^{m}a_jA^j\right\|\leqslant\epsilon',(n\leqslant m).$$

因此, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\{[(A+zI)(I+zA^*)^{-1}]^n-A^n\}$$

关于 $z(|z|\leqslant\sigma)$一致收敛. 由(4.2.3)式,

$$\begin{aligned}
&\lim_{z\to 0}\frac{\varphi[(A+zI)(I+zA^*)^{-1}]-\varphi(A)}{z}\\
&=(I-A^*A)\lim_{z\to 0}\sum_{n=1}^{\infty}a_n[(I+zA^*)^{-1}]^n\\
&\quad\cdot[(A+zI)^{n-1}+(A+zI)^{n-2}(A+zA^*A)\\
&\quad+\cdots+(A+zA^*A)^{n-1}]\\
&=(I-A^*A)\sum_{n=1}^{\infty}na_nA^{n-1}\\
&=(I-A^*A)\varphi'(A).
\end{aligned}\tag{4.2.4}$$

故 $\varphi(\psi(z))$在 $z=0$的近邻解析.

2°. 证明 $F(z)$在 Δ 内解析.

由1°知 $\varphi(\psi(z))$在 Δ 内解析, 则 $\varphi(\psi(z))-\varphi(A)$在 Δ 内亦解析, 并且由 $I-\varphi(A)^*\varphi(\psi(z))$在 Δ 内解析、可逆以及 $I-\varphi(A)^*\varphi(\psi(z))>0$, 则知 $(I-\varphi(A)^*\varphi(\psi(z)))^{-1}$在 Δ 内必解析. 故

$$F(z)=(\varphi(\psi(z))-\varphi(A))(I-\varphi(A)^*\varphi(\psi(z)))^{-1}$$

在 Δ 内解析.

3°. 证明 $\|F(z)\|<1$, $(z\in\Delta)$且 $F(0)=0$.

显然, $F(0)=0$. 令 $B=\varphi(A)$, $C=\varphi(\psi(z))$. 现只须证明

$$\|F(z)\|=\|(C-B)(I-B^*C)^{-1}\|<1,$$

即证

$$((C-B)(I-B^*C)^{-1})^*((C-B)(I-B^*C)^{-1})<I.$$

若不然，仿(4.2.1)式的证明方法可得

$$(I-C^*C)(I-B^*B)\leqslant 0. \tag{4.2.5}$$

但由于 $I-C^*C, I-B^*B$ 均为 Hermite 算子且 $\|C\|<1, \|B\|<1$，即 $I-C^*C>0, I-B^*B>0$，所以，

$$(I-C^*C)(I-B^*B)>0.$$

这与(4.2.5)式矛盾. 故 $\|F(z)\|<1, (z\in\Delta), F(0)=0$.

对于任意的 $x\in H, \|x\|\leqslant 1$，令

$$g(z)=(F(z)x,x).$$

设 $F(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_n(A)z^n$. 由前面所证，$F(z)$ 在 Δ 内解析，则级数在 Δ 内收敛，并且对 $\forall\ x\in H, \|x\|\leqslant 1$，我们有

$$|(b_n(A)x,x)|\leqslant\|b_n(A)\|\cdot\|x\|\leqslant\|b_n(A)\|.$$

于是

$$g(z)=(F(z)x,x)=((\sum_{n=0}^{\infty}b_n(A)z^n)x,x)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(b_n(A)x,x)z^n$$

在 Δ 内收敛，$g(z)$ 在 Δ 内解析，并且

$$|g(z)|=|(F(z)x,x)|\leqslant\|F(z)\|.$$

因此，对于 $z\in\Delta$，$|g(z)|<1$ 且 $g(0)=(F(0)x,x)=0$. 由经典的 Schwarz 引理，对于 $z\in\Delta$，我们有

$$|g(z)|\leqslant|z|$$

即对于任一 $x\in H, \|x\|\leqslant 1$ 以及 $z\in\Delta$，我们均有

$$|(F(z)x,x)|\leqslant|z|.$$

从而，对于 $z\in\Delta$，

$$\|F(z)\|=\sup_{\substack{x\in H\\ \|x\|\leqslant 1}}|(F(z)x,x)|\leqslant|z|.$$

由(4.2.2)式以及上面不等式，我们有

$$\|\varphi(\psi(z))-\varphi(A)\|$$

$$\leqslant\|F(z)\|\cdot\|I-\varphi(A)^*\varphi(\psi(z))\|$$
$$\leqslant|z|\cdot\|I-\varphi(A)^*\varphi(\psi(z))\|,$$

即

$$\left\|\frac{\varphi(\psi(z))-\varphi(A)}{z}\right\|\leqslant\|I-\varphi(A)^*\varphi(\psi(z))\|.$$

在上式中，令 $z\to 0$，并由(4.2.4)式得

$$\|(I-A^*A)\varphi'(A)\|\leqslant\|I-\varphi(A)^*\varphi(A)\|.$$

由上面的不等式以及不等式

$$\|(I-A^*A)\varphi'(A)\|\geqslant(1-\|A\|^2)\|\varphi'(A)\|$$

即推出不等式

$$\|\varphi'(A)\|\leqslant\frac{\|I-\varphi(A)^*\varphi(A)\|}{1-\|A\|^2}.$$

引理获证. ▌

利用引理4.2.1、4.2.2，我们可以证明下面定理.

定理4.2.1[5] 设 $f(z),g(z)\in H(\Delta)$，n 和 m 分别为 $f(z)$ 和 $g(z)$ 在 $z=0$ 处的零点阶数且 $n>m>0$. 又设 A 为 Hilbert 空间 H 上的任一真压缩算子，$A^*A=AA^*$，并且 $\|f(A)\|\leqslant\|g(A)\|$.

(i) 如果 $0\leqslant r\leqslant\sqrt{2}-1$，则

$$\max_{\|A\|\leqslant r}\|f'(A)\|\leqslant\max_{\|A\|\leqslant r}\|g'(A)\|. \tag{4.2.6}$$

(ii) 如果 $g(z)$ 在 Δ 内单叶，则

$$\|f'(A)\|\leqslant\|g'(A)\|, \tag{4.2.7}$$

其中 $\|A\|\leqslant r$，$r=\alpha_1+\beta_1+\frac{1}{2}$，$\alpha_1=\sqrt{\frac{-3+\sqrt{\frac{152}{3}}}{24}}$，$\beta=-\frac{5}{12\alpha_1}$.

(iii) 如果 $g(z)$ 是 Δ 内的一一的、到上的凸函数，则

$$\|f'(A)\|\leqslant\|g'(A)\|, \tag{4.2.8}$$

其中 $\|A\|\leqslant r$，$r=\alpha_2+\beta_2+\frac{1}{3}$，$\alpha_2=\sqrt{\frac{1+\sqrt{513}}{27}}$，$\beta_2=-\frac{8}{9\alpha_2}$.

证明 (i) 根据引理4.2.1，存在 $\varphi\in H(\Delta)$，$\varphi(0)=0$，$|\varphi(z)|<1\,(z\in\Delta)$ 使得

$$f(z)=\varphi(z)g(z), z\in\Delta. \tag{4.2.9}$$

于是，由引理4.2.2

$$\|\varphi'(A)\|\leqslant\frac{\|I-\varphi(A)^*\varphi(A)\|}{1-\|A\|^2}\leqslant\frac{1+\|\varphi(A)\|^2}{1-\|A\|^2}, \tag{4.2.10}$$

其中 A 为 H 上的真压缩算子且 $A^*A=AA^*$. 又由(4.2.9)式，得

$$f'(z)=\varphi'(z)g(z)+\varphi(z)g'(z).$$

对应于算子情形，我们有

$$f'(A)=\varphi'(A)g(A)+\varphi(A)g'(A). \tag{4.2.11}$$

记 $g(z)=\int_0^z g'(z)dz$，取积分路径为0到 z 的线段，则

$$g(z)=z\int_0^1 g'(tz)dt,$$

从而

$$g(A)=A\int_0^1 g'(tA)dt.$$

于是，

$$\|g(A)\|\leqslant\|A\|\cdot\max_{\|B\|\leqslant\|A\|}\|g'(B)\|. \tag{4.2.12}$$

再由(4.2.10)，(4.2.11)以及(4.2.12)式，我们得

$$\begin{aligned}\|f'(A)\|&=\|\varphi'(A)g(A)+\varphi(A)g'(A)\|\\&\leqslant\|\varphi'(A)\|\cdot\|g(A)\|+\|\varphi(A)\|\cdot\|g'(A)\|\\&\leqslant\|A\|\cdot\frac{1+\|\varphi(A)\|^2}{1-\|A\|^2}\cdot\max_{\|B\|\leqslant\|A\|}\|g'(B)\|\\&\quad+\|\varphi(A)\|\cdot\|g'(A)\|\\&\leqslant\frac{\|A\|+(1-\|A\|^2)\|\varphi(A)\|+\|A\|\cdot\|\varphi(A)\|^2}{1-\|A\|^2}\\&\quad\cdot\max_{\|B\|\leqslant\|A\|}\|g'(B)\|.\end{aligned}$$

由算子的 Schwarz 引理，$\|\varphi(A)\|\leqslant\|A\|(\|A\|<1)$，故由上式可得

$$\|f'(A)\|\leqslant\frac{2\|A\|}{1-\|A\|^2}\cdot\max_{\|B\|\leqslant\|A\|}\|g'(B)\|. \tag{4.2.13}$$

由于当$0\leqslant\|A\|\leqslant\sqrt{2}-1$时，$\frac{2\|A\|}{1-\|A\|^2}\leqslant1$，于是，由(4.2.13)式得

$$\|f'(A)\|\leqslant\max_{\|B\|\leqslant\|A\|}\|g'(B)\|.$$

从而(4.2.6)式成立.

(ii) 因为

$$|g(z)|\leqslant\frac{|z|(1+|z|)}{1-|z|}\cdot|g'(z)|,$$

即

$$\left|\frac{g(z)}{g'(z)}\right|\leqslant\frac{|z|(1+|z|)}{1-|z|},z\in\Delta,$$

并且 $h(z)=\dfrac{g(z)}{g'(z)}$ 在 Δ 内解析,则根据定理3.1.3(算子的最大范数定理),对于 H 上的真压缩算子,我们有

$$\|h(A)\|\leqslant\frac{\|A\|(1+\|A\|)}{1-\|A\|}.$$

因此,

$$\begin{aligned}\|g(A)\|&=\|h(A)g'(A)\|\leqslant\|h(A)\|\cdot\|g'(A)\|\\&\leqslant\frac{\|A\|(1+\|A\|)}{1-\|A\|}\cdot\|g'(A)\|.\end{aligned}\tag{4.2.14}$$

于是,根据(4.2.10),(4.2.11)以及(4.2.14)式得

$$\|f'(A)\|\leqslant\frac{2\|A\|^3-2\|A\|^2+2\|A\|}{(1-\|A\|)^2}\cdot\|g'(A)\|.\tag{4.2.15}$$

令 $x=\|A\|$, $\dfrac{2x^3-2x^2+2x}{(1-x)^2}\leqslant1$, $(0\leqslant x<1)$,即

$$h(x)=2x^3-3x^2+4x-1\leqslant0,$$

解得,当 $r=\alpha_1+\beta_1+\dfrac{1}{2}$ 时,$h(r)=0$. 于是,由(4.2.15)式,当 $\|A\|\leqslant r$ 时,我们得(4.2.7)式.

(iii) 由于

$$|g(z)|\leqslant|z|(1+|z|)|g'(z)|,$$

故

$$\|g(A)\|\leqslant\|A\|(1+\|A\|)\|g'(A)\|.\tag{4.2.16}$$

于是,根据(4.2.11),(4.2.12)以及(4.2.16)式,我们有

$$\|f'(A)\|\leqslant\frac{\|A\|^3-\|A\|^2+2\|A\|}{1-\|A\|}\cdot\|g'(A)\|.$$

故当$\|A\|\leqslant r$，$r=\alpha_2+\beta_2+\frac{1}{3}$时，(4.2.8)式成立. 定理证毕. ▌

推论4.2.1 设$f(z)\in H(\Delta)$，$|f(z)|<1(z\in\Delta)$且$f(0)=0$，以及$f(z)$在$z=0$处的零点阶数大于1. 则对于 Hilbert 空间H上的真压缩算子A且$A^*A=AA^*$，我们有

$$\|f'(A)\|\leqslant 1, \tag{4.2.17}$$

其中$\|A\|\leqslant\sqrt{2}-1$.

证明 取$g(z)=z$，则$g'(z)\equiv 1$. 于是，由算子 Schwarz 引理：

$$\|f(A)\|\leqslant\|A\|=\|g(A)\|.$$

从而，由定理4.2.1的(i)，我们有

$$\max_{\|A\|\leqslant r}\|f'(A)\|\leqslant\max_{\|A\|\leqslant r}\|g'(A)\|=\max_{\|A\|\leqslant r}\|I\|=1,$$

其中$\|A\|\leqslant r\leqslant\sqrt{2}-1$. 故(4.2.17)式成立. ▌

定理4.2.2[5] 设函数

$$f(z)=c_0+\sum_{k=n}^{\infty}c_kz^k, (n\geqslant 1),$$

在Δ内解析且$|f(z)|<1$. 则对于 Hilbert 空间H上的可逆真压缩算子A，且$A^*A=AA^*$，我们有

$$\|f'(A)\|\leqslant\|A\|^{n+1}\cdot\frac{\|I-f(A)^*f(A)\|}{(1-\|A\|^{2n})(1-\|I-A^*A\|)}\cdot\left[n+\frac{2\|A\|^{2n-1}}{(1-\|A\|^2)(1-\|I-A^*A\|)^{n-1}}\right]. \tag{4.2.18}$$

证明 令

$$f_1(z)=\frac{f(z)-c_0}{1-\bar{c}_0f(z)}. \tag{4.2.19}$$

于是，$f_1(z)$在Δ内解析且$|f_1(z)|<1(z\in\Delta)$，$f_1(0)=0$. 不妨设

$$f_1(z)=z^n\varphi(z). \tag{4.2.20}$$

则$|\varphi(z)|\leqslant 1$. 由(4.2.19)式得

$$f_1(z)=(f(A)-c_0I)(I-\bar{c}_0f(A))^{-1},$$

从而

$$f'_1(A)=(1-|c_0|^2)f'(A)(I-\bar{c}_0f(A))^{-2}.$$

于是

$$f'_1(A)^*f'_1(A)=(1-|c_0|^2)^2f'(A)^*f'(A)$$
$$(I-\bar{c}_0f(A))^{-2}(I-c_0f(A)^*)^{-2}.$$

通过简单恒等运算可得

$$f'_1(A)^*f'_1(A)[I-f_1(A)^*f_1(A)]^{-2}$$
$$=f'(A)^*f'(A)[I-f(A)^*f(A)]^{-2},$$

从而，我们得到

$$\|f'(A)\|\leqslant\frac{\|f'_1(A)\|\cdot\|I-f(A)^*f(A)\|}{1-\|f_1(A)\|^2}. \qquad (4.2.21)$$

由(4.2.20)式，我们有

$$z^{n+1}\phi(z)=zf'_1(z)-nf_1(z).$$

于是，

$$A^{n+1}\phi(A)=Af'_1(A)-nf_1(A),$$

即

$$A^*Af'_1(A)=nA^*f_1(A)+(A^*A)\cdot A^n\phi(A). \quad (4.2.22)$$

由于算子 A 可逆，从而 A^*A 亦可逆. 于是，(4.2.22)式可写为

$$f'_1(A)=n(A^*A)^{-1}A^*f_1(A)+A^n\phi(A).$$

因此，由上式及引理4.2.2，

$$\|f'_1(A)\|$$
$$\leqslant n\|(A^*A)^{-1}\|\cdot\|A\|\cdot\|f_1(A)\|+\|A\|^n\cdot\frac{\|I-\varphi(A)^*\varphi(A)\|}{1-\|A\|^2}.$$
$$(4.2.23)$$

而由(4.2.20)得 $f_1(A)=A^n\varphi(A)$，即

$$\varphi(A)=(A^n)^{-1}f_1(A).$$

于是

$$I-\varphi(A)^*\varphi(A)=I-(A^*A)^{-n}f_1(A)^*f_1(A)$$
$$=(A^*A)^{-n}[(A^*A)^n-f_1(A)^*f_1(A)].$$
$$(4.2.24)$$

又由于

$$(A^*A)^{-1}=[I-(I-A^*A)]^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(I-A^*A)^n,$$

所以

$$\|(A^*A)^{-1}\|\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}\|I-A^*A\|^n=(1-\|I-A^*A\|)^{-1}. \tag{4.2.25}$$

由算子 Schwarz 引理，$\|f_1(A)\|\leqslant\|A\|^n$. 从而，我们得

$$\|(A^*A)^n-f_1(A)^*f_1(A)\|\leqslant 2\|A\|^{2n}. \tag{4.2.26}$$

因此，由(4.2.23)—(4.2.26)，我们推得(4.2.18)式. 定理得证. ∎

§4.3

具有负系数的 p-叶算子解析函数

我们在这一节里将介绍关于具有负系数的 p-叶算子解析函数的变形定理和 Bernardi 定理.

为叙述简便计，我们给出如下记号：

以 Φ_p^* 表示形如

$$f(z)=z^p+\sum_{n=1}^{\infty}a_{p+n}z^{p+n},\ p\in\mathbf{N},z\in\Delta, \tag{4.3.1}$$

的 p-叶解析函数族.

以 $\Phi_p^*(\alpha,\beta,\gamma,\varepsilon,\eta)$ 表示满足条件

$$\left|\frac{zf'(z)/f(z)-p}{(\eta-\varepsilon)\gamma[zf'(z)/f(z)-(p-\alpha)]+\varepsilon[zf'(z)/f(z)-p]}\right|<\beta, \tag{$*$}$$

的所有函数 $f\in\Phi_p^*$，其中 $z\in\Delta,0<\alpha<p,0<\beta\leqslant1,0<\gamma\leqslant1,-1\leqslant\varepsilon<\eta\leqslant1$，且$0<\eta\leqslant1$.

以 $\Phi_{p0}^*(\alpha,\beta,\gamma,\varepsilon,\eta)$ 表示具有如下形式：

$$f(z)=z^p-\sum_{n=1}^{\infty}a_{p+n}z^{p+n},a_{p+n}\geqslant 0(n\geqslant 1). \qquad (4.3.2)$$

的所有函数 $f\in\Phi_p^*(\alpha,\beta,\gamma,\varepsilon,\eta)$.

为了证明 $\Phi_p^*(\alpha,\beta,\gamma,\varepsilon,\eta)$变形定理，我们需要下面的引理[6].

引理4.3.1 设函数

$$f(z)=z^p-\sum_{n=1}^{\infty}a_{p+n}z^{p+n},a_{p+n}\geqslant 0(n\geqslant 1)$$

在 Δ 内解析. 则 $f\in\Phi_{p0}^*(\alpha,\beta,\gamma,\varepsilon,\eta)$当且仅当

$$\sum_{n=1}^{\infty}\{n+\beta[(\eta-\varepsilon)\alpha\gamma+(\varepsilon+(\eta-\varepsilon)\gamma)n]\}a_{p+n}$$
$$\leqslant(\eta-\varepsilon)\alpha\beta\gamma, \qquad (4.3.3)$$

其中$0\leqslant\alpha<p,0<\beta\leqslant 1,0<\frac{-\varepsilon}{\eta-\varepsilon}\leqslant\gamma\leqslant 1,-1\leqslant\varepsilon<\eta\leqslant 1,0<\eta\leqslant 1$.

证明 假设不等式(4.3.3)成立. 则对于$|z|<1$，我们有

$$|zf'(z)-pf(z)|$$
$$-\beta|(\eta-\varepsilon)\gamma[zf'(z)-(p-\alpha)f(z)]+\varepsilon[zf'(z)-pf(z)]|$$
$$=\left|\sum_{n=1}^{\infty}na_{p+n}z^{p+n}\right|$$
$$-\beta\left|(\eta-\varepsilon)\alpha\gamma z^p+\sum_{n=1}^{\infty}[-(\eta-\varepsilon)\alpha\gamma-(\varepsilon+(\eta-\varepsilon)\gamma)n]a_{p+n}z^{p+n}\right|$$
$$\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}na_{p+n}|z|^p$$
$$-\beta\left\{(\eta-\varepsilon)\alpha\gamma|z|^p-\sum_{n=1}^{\infty}[(\eta-\varepsilon)\alpha\gamma+(\varepsilon+(\eta-\varepsilon)\gamma)n]\cdot|z|^p\right\}$$
$$\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\{n+\beta[(\eta-\varepsilon)\alpha\gamma+(\varepsilon+(\eta-\varepsilon)\gamma)n]\}a_{p+n}-(\eta-\varepsilon)\alpha\beta\gamma$$
$$\leqslant 0,$$

其中$0\leqslant\alpha<p,0<\beta\leqslant 1,0\leqslant\frac{-\varepsilon}{\eta-\varepsilon}\leqslant\gamma\leqslant 1,-1\leqslant\varepsilon<\eta\leqslant 1,0<\eta\leqslant 1$.

因此，由最大模原理知，条件(*)成立. 故 $f\in\Phi_{p0}^*(\alpha,\beta,\gamma,\varepsilon,\eta)$.

反之，由 $f\in\Phi_{p0}^*(\alpha,\beta,\gamma,\varepsilon,\eta)$，我们有

$$\left|\frac{zf'(z)/f(z)-p}{(\eta-\varepsilon)\gamma[zf'(z)/f(z)-(p-\alpha)]+\varepsilon[zf'(z)/f(z)-p]}\right|$$

$$=\left|\frac{\sum_{n=1}^{\infty}na_{p+n}z^{p+n}}{(\eta-\varepsilon)\alpha\gamma z^{p}-\sum_{n=1}^{\infty}[(\eta-\varepsilon)\alpha\gamma+(\varepsilon+(\eta-\varepsilon)\gamma)n]a_{p+n}z^{p+n}}\right|$$

$$<\beta.$$

因为对任一复数 z，均有 $|\mathrm{Re}z|\leqslant|z|$. 于是，我们有

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{\sum_{n=1}^{\infty}na_{p+n}z^{p+n}}{(\eta-\varepsilon)\alpha\gamma z^{p}-\sum_{n=1}^{\infty}[(\eta-\varepsilon)\alpha\gamma+(\varepsilon+(\eta-\varepsilon)\gamma)n]a_{p+n}z^{p+n}}\right\}$$

$$<\beta. \tag{4.3.4}$$

取 z 为实数，并且令 $z\to1$，则由(4.3.4)式得

$$\sum_{n=1}^{\infty}na_{p+n}$$

$$\leqslant(\eta-\varepsilon)\alpha\beta\gamma-\sum_{n=1}^{\infty}\beta[(\eta-\varepsilon)\alpha\gamma+(\varepsilon+(\eta-\varepsilon)\gamma)n]a_{p+n}.$$

从而(4.3.3)式成立. 引理证毕. ∎

定理4.3.1 设 $f\in\Phi_{p0}^{*}(\alpha,\beta,\gamma,\varepsilon,\eta)$，其中 $0\leqslant\alpha<p$，$0<\beta\leqslant1$，$0<\frac{-\varepsilon}{\eta-\varepsilon}<\gamma\leqslant1$，$-1\leqslant\varepsilon<\eta\leqslant1$ 且 $0<\eta\leqslant1$. 则对于 Hilbert 空间 H 上的真压缩算子 A，我们有

$$\|A^{p}\|-\frac{(\eta-\varepsilon)\alpha\beta\gamma}{1+\beta[(\eta-\varepsilon)\gamma(1+\alpha)+\varepsilon]}\cdot\|A^{p+1}\|\leqslant\|f(A)\|$$

$$\leqslant\|A^{p}\|+\frac{(\eta-\varepsilon)\alpha\beta\gamma}{1+\beta[(\eta-\varepsilon)\gamma(1+\alpha)+\varepsilon]}\cdot\|A^{p+1}\|; \tag{4.3.5}$$

$$p\|A^{p-1}\|-\frac{2p(\eta-\varepsilon)\alpha\beta\gamma}{1+\beta[(\eta-\varepsilon)\gamma(1+\alpha)+\varepsilon]}\cdot\|A^{p}\|\leqslant\|f'(A)\|$$

$$\leqslant p\|A^{p-1}\|+\frac{2p(\eta-\varepsilon)\alpha\beta\gamma}{1+\beta[(\eta-\varepsilon)\gamma(1+\alpha)+\varepsilon]}\|A^{p}\|. \tag{4.3.6}$$

证明 由引理4.3.1，

$$\{1+\beta[(\eta-\varepsilon)\gamma(1+\alpha)+\varepsilon]\}\sum_{n=1}^{\infty}a_{p+n}$$
$$\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\{n+\beta[(\eta-\varepsilon)\alpha\gamma+(\varepsilon+(\eta-\varepsilon)\gamma)n]\}a_{p+n}$$
$$\leqslant(\eta-\varepsilon)\alpha\beta\gamma.$$

从而

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_{p+n}\leqslant\frac{(\eta-\varepsilon)\alpha\beta\gamma}{1+\beta[(\eta-\varepsilon)\gamma(1+\alpha)+\varepsilon]}.\qquad(4.3.7)$$

由于函数

$$f(z)=z^p-\sum_{n=1}^{\infty}a_{p+n}z^{p+n}$$

在 Δ 内解析，对于 H 上的真压缩算子 A，我们有

$$f(A)=A^p-\sum_{n=1}^{\infty}a_{p+n}A^{p+n}.$$

因此，由不等式(4.3.7)，得

$$\|f(A)\|\geqslant\|A^p\|-\|A^{p+1}\|\cdot\sum_{n=1}^{\infty}a_{p+n}$$
$$\geqslant\|A^p\|-\|A^{p+1}\|\cdot\frac{(\eta-\varepsilon)\alpha\beta\gamma}{1+\beta[(\eta-\varepsilon)\gamma(1+\alpha)+\varepsilon]},$$

并且

$$\|f(A)\|\leqslant\|A^p\|+\|A^{p+1}\|\cdot\sum_{n=1}^{\infty}a_{p+n}$$
$$\leqslant\|A^p\|+\|A^{p+1}\|\cdot\frac{(\eta-\varepsilon)\alpha\beta\gamma}{1+\beta[(\eta-\varepsilon)\gamma(1+\alpha)+\varepsilon]}.$$

故不等式(4.3.5)成立.

下面证明不等式(4.3.6)成立. 对于 $n\geqslant1$，我们有下面不等式：

$$\frac{n+p}{2p}\{1+\beta[(\eta-\varepsilon)\gamma(1+\alpha)+\varepsilon]\}$$
$$\leqslant\{n+\beta[(\eta-\varepsilon)\alpha\gamma+(\varepsilon+(\eta-\varepsilon)\gamma)n]\}.$$

于是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+p}{2p}\{1+\beta[(\eta-\varepsilon)\gamma(1+\alpha)+\varepsilon]\}a_{p+n}$$
$$\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\{n+\beta[(\eta-\varepsilon)\alpha\gamma+(\varepsilon+(\eta-\varepsilon)\gamma)n]\}a_{p+n}$$
$$\leqslant(\eta-\varepsilon)\alpha\beta\gamma,$$

从而

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+p)a_{p+n}\leqslant\frac{2p(\eta-\varepsilon)\alpha\beta\gamma}{1+\beta[(\eta-\varepsilon)\gamma(1+\alpha)+\varepsilon]}.\tag{4.3.8}$$

但

$$f'(z)=pz^{p-1}-\sum_{n=1}^{\infty}(p+n)a_{p+n}z^{p+n-1},$$

从而对于 H 上的真压缩算子 A，我们有

$$f'(A)=pA^{p-1}-\sum_{n=1}^{\infty}(p+n)a_{p+n}A^{p+n-1}.$$

由不等式(4.3.8)，得

$$\|f'(A)\|\geqslant p\|A^{p-1}\|-\|A^p\|\cdot\sum_{n=1}^{\infty}(p+n)a_{p+n}$$
$$\geqslant p\|A^{p-1}\|-\|A^p\|\cdot\frac{2p(\eta-\varepsilon)\alpha\beta\gamma}{1+\beta[(\eta-\varepsilon)\gamma(1+\alpha)+\varepsilon]},$$

并且

$$\|f'(A)\|\leqslant p\|A^{p-1}\|+\|A^p\|\cdot\sum_{n=1}^{\infty}(p+n)a_{p+n}$$
$$\leqslant p\|A^{p-1}\|+\|A^p\|\cdot\frac{2p(\eta-\varepsilon)\alpha\beta\gamma}{1+\beta[(\eta-\varepsilon)\gamma(1+\alpha)+\varepsilon]}.$$

故不等式(4.3.6)成立. 定理得证. ▌

在给出算子的 Bernardi 定理[7]之前，让我们先证明下面的引理.

引理4.3.2　设函数

$$h(z)=p+b_1z+b_2z^2+\cdots$$

在 Δ 内解析，并且 $|h(z)-p|<1$. 则对于 Hilbert 空间 H 上的真压缩算子 A，函数 $h(z)$ 满足条件

$$\|[h(A)-pI]\{(\eta-\varepsilon)\gamma[h(A)-(p-\alpha)I]+\varepsilon[h(A)-pI]\}^{-1}\|$$

$$<\beta, \tag{4.3.9}$$

这里 $\frac{1}{\eta-\varepsilon}\leqslant\alpha<p$，$0<\beta\leqslant 1$，$0<\frac{-\varepsilon}{(\eta-\varepsilon)(1-\alpha)}<\gamma\leqslant\min\left\{\frac{-\varepsilon}{\eta-\varepsilon},\frac{1}{(\eta-\varepsilon)\alpha}\right\}$，$-1\leqslant\varepsilon<\eta\leqslant 1$ 并且 $0<\eta\leqslant 1$ 当且仅当存在 Δ 内的解析函数 $\varphi(z)$ 使得 $|\varphi(z)|\leqslant\beta(z\in\Delta)$ 以及

$$\begin{aligned}h(A)=&\{pI+[p\varepsilon+(\eta-\varepsilon)\gamma(p-\alpha)]A\varphi(A)\}\\&\cdot\{I+[\varepsilon+(\eta-\varepsilon)\gamma]A\varphi(A)\}^{-1}.\end{aligned} \tag{4.3.10}$$

证明 假设函数 $h(z)$ 满足条件(4.3.9). 令

$$h_1(z)=\frac{p-h(z)}{(\eta-\varepsilon)\gamma[h(z)-(p-\alpha)]+\varepsilon[h(z)-p]}.$$

则函数 $h_1(z)$ 在 Δ 内解析且 $|h_1(z)|<\beta(z\in\Delta)$，$h_1(0)=0$. 从而，由经典的 Schwarz 引理，我们有

$$h_1(z)=z\varphi(z),$$

其中 $\varphi(z)$ 在 Δ 内解析且 $|\varphi(z)|\leqslant\beta(z\in\Delta)$. 由此我们得

$$h(z)=\frac{p+[p\varepsilon+(\eta-\varepsilon)\gamma(p-\alpha)]z\varphi(z)}{1+[\varepsilon+(\eta-\varepsilon)\gamma]z\varphi(z)}.$$

并且，由算子函数的基本定理 $\|\varphi(A)\|\leqslant\beta(\|A\|<1)$. 令

$$B=I+[\varepsilon+(\eta-\varepsilon)r]A\varphi(A),$$

由于

$$\|I-B\|=\|[-\varepsilon-(\eta-\varepsilon)\gamma]A\varphi(A)\|\leqslant[-\varepsilon-(\eta-\varepsilon)\gamma]\beta<1,$$

所以算子 B 可逆. 故(4.3.10)式成立.

反之，若(4.3.10)成立，并且对于 $z\in\Delta$，$|\varphi(z)|\leqslant\beta$，则函数

$$h(z)=\frac{p+[p\varepsilon+(\eta-\varepsilon)\gamma(p-\alpha)]z\varphi(z)}{1+[\varepsilon+(\eta-\varepsilon)\gamma]z\varphi(z)}$$

在 Δ 内解析. 因此，对于 $z\in\Delta$，我们有

$$\left|\frac{h(z)-p}{(\eta-\varepsilon)\gamma[h(z)-(p-\alpha)]+\varepsilon[h(z)-p]}\right|=|z\varphi(z)|<\beta.$$

由基本定理，$\|A\varphi(A)\|<\beta\leqslant 1(\|A\|<1)$. 令

$$\begin{aligned}C&=(\eta-\varepsilon)\gamma[h(A)-(p-\alpha)I]+\varepsilon[h(A)-pI]\\&=[\varepsilon+(\eta-\varepsilon)\gamma][h(A)-pI]+(\eta-\varepsilon)\alpha\gamma I.\end{aligned}$$

由于 $|h(z)-p|<1$，则 $\|h(A)-pI\|<1$. 因此，

$$\begin{aligned}\|I-C\| &= \|I-\{[\varepsilon+(\eta-\varepsilon)\gamma][h(A)-pI]+(\eta-\varepsilon)\alpha\gamma I\}\| \\ &\leqslant \|[-\varepsilon-(\eta-\varepsilon)\gamma][h(A)-pI]\|+\|[1-(\eta-\varepsilon)\alpha\gamma]I\| \\ &< -\varepsilon-(\eta-\varepsilon)\gamma+1-(\eta-\varepsilon)\alpha\gamma \\ &= 1-[\varepsilon+(\eta-\varepsilon)\gamma(1+\alpha)]<1.\end{aligned}$$

从而，算子 C 可逆，故(4.3.9)式成立. 引理证毕. ∎

如果$(\alpha,\beta,\gamma,\varepsilon,\eta)$满足引理4.3.2中的条件，我们称$(\alpha,\beta,\gamma,\varepsilon,\eta)$满足条件(* *). 我们说 $f\in\Phi_p^*(\alpha,\beta,\gamma,\varepsilon,\eta;A)$，如果 $f\in\Phi_p^*$，并且满足不等式(4.3.9)，其中 $h(z)=zf'(z)/f(z)$ 且$(\alpha,\beta,\gamma,\varepsilon,\eta)$满足条件(* *). 设 T_p^* 为所有在 Δ 内解析的函数

$$f(z)=a_pz^p-\sum_{n=1}^{\infty}a_{n+k}z^{n+k},$$

其中 $p\geqslant 1$，$k\geqslant p$，$a_{n+p}\geqslant 0$，$a_p\geqslant 0$，并且对于某一实数 $z_0\neq 0$，$-1<z_0<1$，$f(z_0)=z_0^p$. 我们说 $f\in T_p^*(A)$，如果 $f\in T_p^*$ 且

$$f(A)=a_pA^p-\sum_{n=1}^{\infty}a_{n+k}A^{n+k},\ \|A\|<1.$$

我们记 $T_p^*(A)$的一个子类：

$$\Phi_p^*(\alpha,\beta,\gamma,\varepsilon,\eta;A_0,A)=\left\{f\in T_p^*(A);\ \begin{array}{l}f\in\Phi_p^*(\alpha,\beta,\gamma,\varepsilon,\eta;A)\text{并且}\\ \text{存在 Hermite 算子 }A_0\text{使得}\\ f(A_0)=A_0^p,\\ -1<A_0<1,A_0\neq 0\end{array}\right\}.$$

另外，我们设 $P_p(\alpha,\beta,\gamma,\varepsilon,\eta;A)$是所有在 Δ 内解析并且具有(4.3.10)形式的函数 $h(z)$之全体，其中$(\alpha,\beta,\gamma,\varepsilon,\eta)$满足条件(* *). 最后，我们定义 $f(A)\prec g(A)$ $(\|A\|<1)$，如果存在 Δ 内的解析函数 $h(z)$满足 $|h(z)|<1$ $(z\in\Delta)$，并且 $f(A)=g(h(A))$ $(\|A\|<1)$.

为了证明 Bernardi 定理，我们还需要下面几个引理[7].

引理4.3.3　设 A 为 Hilbert 空间 H 上的可逆真压缩算子.

又设 φ 和 ψ 为 Δ 内的解析函数，并且 ψ 将 Δ 映射到一个多叶星形区域使得 $\psi(A)$ 为可逆算子，以及 $\varphi(0)=\psi(0)=0, h(0)=\varphi'(0)/\psi'(0)=p$，

$$h\in P_p(\alpha,\beta,\gamma,\varepsilon,\eta;A),$$

其中 $h(z)=\varphi'(z)/\psi'(z)$. 则

$$\tilde{h}\in P_p(\alpha,\beta,\gamma,\varepsilon,\eta;A),$$

其中 $\tilde{h}(z)=\varphi(z)/\psi(z)$

证明 因为 $h\in P_p(\alpha,\beta,\gamma,\varepsilon,\eta;A)$ 当且仅当

$$\begin{aligned} h(A)=&\{pI+[p\varepsilon+(\eta-\varepsilon)\gamma(p-\alpha)]\omega(A)\}\\ &\cdot\{I+[\varepsilon+(\eta-\varepsilon)\gamma]\omega(A)\}^{-1}\\ &\prec\{pI+[p\varepsilon+(\eta-\varepsilon)\gamma(p-\alpha)A\}\{I+[\varepsilon+(\eta-\varepsilon)\gamma]A\}^{-1},\end{aligned}$$

其中 $|\omega(z)|<1(z\in\Delta),\omega(0)=0$. 而函数

$$\frac{p+[p\varepsilon+(\eta-\varepsilon)\gamma(p-\alpha)]z}{1+[\varepsilon+(\eta-\varepsilon)\gamma]z}$$

将 $|z|<\delta$ 映射为以 $a(\delta)$ 为中心，$b(\delta)$ 为半径的圆盘，其中

$$a(\delta)=\frac{p-[\varepsilon+(\eta-\varepsilon)\gamma][p\varepsilon+(\eta-\varepsilon)\gamma(p-\alpha)]\delta^2}{1-[\varepsilon+(\eta-\varepsilon)\gamma]\delta^2},$$

$$b(\delta)=\frac{(\eta-\varepsilon)\alpha\gamma}{1-[\varepsilon+(\eta-\varepsilon)\gamma]^2\delta^2}.$$

由于 $h(z)$ 取值于此圆盘内，并且

$$|h(z)-a(\delta)|<b(\delta),\ |z|<\delta,0<\delta<1.$$

由基本定理

$$\|h(A)-a(\delta)I\|<b(\delta),\|A\|<\delta,0<\delta<1.$$

取函数 g 使得

$$g(z)\psi'(z)=\varphi'(z)-a(\delta)\psi'(z).$$

则 $g(z)=h(z)-a(\delta)$ 在 Δ 内解析，从而

$$g(A)=h(A)-a(\delta)I,\|A\|<1,$$

$$\|g(A)\|<b(\delta),\|A\|<1.$$

固定 $z_0\in\Delta$，取连接0到 $\psi(z_0)$ 的线节 L，并且 L 位于由 ψ 映照的星形区域的某一叶内. 则

$$\begin{aligned}&\varphi(z_0)-a(\delta)\psi(z_0)\\&=\int_0^{z_0}[\varphi'(t)-a(\delta)\psi'(t)]dt\\&=\int_0^1 z_0[\varphi'(z_0t)-a(\delta)\psi'(z_0t)]dt.\end{aligned}$$

因此，对固定的可逆真压缩算子 A_0，我们有

$$\varphi(A_0)-a(\delta)\psi(A_0)=\int_0^1 A_0[\varphi'(A_0t)-a(\delta)\psi'(A_0t)]dt.$$

于是，

$$\begin{aligned}&\|\varphi(A_0)-a(\delta)\psi(A_0)\|\\&=\left\|\int_0^1 A_0[\varphi'(A_0t)-a(\delta)\psi'(A_0t)]dt\right\|\\&=\left\|\int_0^1 A_0g(A_0t)\psi'(A_0t)dt\right\|\\&<b(\delta)\int_0^1\|d\psi(A_0t)\|\\&\leqslant b(\delta)\|\psi(A_0)\|,\end{aligned}$$

从而

$$\|\tilde{h}(A)-a(\delta)I\|<b(\delta),$$

并且

$$\begin{aligned}\tilde{h}(A)\prec\{&pI+[p\varepsilon+(\eta-\varepsilon)\gamma(p-\alpha)]A\}\\&\{I+[(\eta-\varepsilon)\gamma+\varepsilon]A\}^{-1},\end{aligned}$$

即等价地有

$$\tilde{h}\in P_p(\alpha,\beta,\gamma,\varepsilon,\eta;A).$$

引理获证. ▌

由引理4.3.3，取$r=1$，$\varepsilon=0$以及$\eta=1$，可得下引理.

引理4.3.4 设A为Hilbert空间H上的可逆真压缩算子. 又设φ和ψ在Δ内解析，ψ将Δ映成阶为$\alpha(0\leqslant\alpha<p)$的多叶星形区域，并且使得$\psi(A)$可逆以及

$$\varphi(0)=\psi(0)=0,h(0)=\varphi'(0)/\psi'(0)=p,$$

$$\mathrm{Re}(h(A))>\alpha I,$$

其中$h(z)=\varphi'(z)/\psi'(z)$. 则

$$\mathrm{Re}(\tilde{h}(A)) > \alpha I,$$

其中 $\tilde{h}(z)=\varphi(z)/\psi'(z)$，$0\leqslant\alpha<p$，$p\geqslant1$.

利用引理4.3.4，我们可以证明下引理4.3.5.

引理4.3.5 设 $f\in\Phi_p^*(\alpha,\beta,\gamma,\varepsilon,\eta;A)$ 使得 $f(A)$ 可逆，并且

$$J(A)=\int_0^1 A^c t^{c-1} f(At)dt,$$

其中 A 为 Hilbert 空间 H 上的可逆真压缩算子，$c=1,2,\cdots$. 则 J 是 $(p+c)$-叶且阶为 $\alpha(0\leqslant\alpha<p)$ 的星形函数，并且 $J(A)$ 可逆.

定理4.3.2 设 A 为 Hilbert 空间 H 上的可逆真压缩算子. 又设 $f\in\Phi_p^*(\alpha,\beta,\gamma,\varepsilon,\eta;A)$ 使得 $f(A)$ 可逆，并且 $g(A)=(p+c)A^{-c}J(A)$，其中 J 是引理4.3.5中所设，$c=1,2,\cdots$. 则

$$g\in\Phi_p^*(\alpha,\beta,\gamma,\varepsilon,\eta;A).$$

证明 因为

$$g(A)=(p+c)\int_0^1 t^{c-1}f(At)dt,$$

并且

$$g'(A)=(p+c)A^{-1}f(A)-cAg(A).$$

令

$$\tilde{h}_g(z)=\frac{zg'(z)}{g(z)}.$$

则

$$\tilde{h}_g(z)=\frac{zg'(z)}{g(z)}\cdot\frac{z^c}{z^c}=\frac{z^cf(z)-cJ(z)}{J(z)}=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)},$$

其中 $\varphi(z)=z^cf(z)-cJ(z)$，$\psi(z)=J(z)$，且 $\varphi(0)=\psi(0)=0$. 由引理4.3.5，$\psi(A)=J(A)$ 是阶为 α 的 $(p+c)$-叶星形函数，其中 $0\leqslant\alpha<p$.

$$h_g(0)=\frac{\varphi'(0)}{\psi'(0)}=\tilde{h}_f(0)=\left.\frac{zf'(z)}{f(z)}\right|_{z=0}=p,$$

并且 $f\in\Phi_p^*(\alpha,\beta,\gamma,\varepsilon,\eta;A)$. 从而

$$h_g(z)=\tilde{h}_f(z)\in P_p(\alpha,\beta,\gamma,\varepsilon,\eta;A).$$

因此，由引理4.3.3导出

$$\tilde{h}_g(z)\in P_p(\alpha,\beta,\gamma,\varepsilon,\eta;A).$$

故 $g\in \Phi_p{}'(\alpha,\beta,\gamma,\varepsilon,\eta;A)$. 定理证毕. ∎

第五章

解析算子函数

设 H 为复 Hilbert 空间，$B(H)$为所有 H 上的有界线性算子构成的复 Banach 空间，并且 $B(H)^*$ 为 $B(H)$的共轭空间. 在复区域 D(即复平面上的开连通子集)上的算子值函数意味着对每一个 $z\in D$，都有 $f(z)\in B(H)$，并且一个 D 上的算子值函数称为是解析的，如果对每个 $\varphi\in B(H)^*$，在经典的意义下，$\varphi(f(z))$在 D 内解析. 以 $A_H(D)$记 D 到 $B(H)$的所有解析算子值函数集合. 复函数理论中的许多熟知的结果，例如，Cauchy 积分定理，Taylor 展开式，Cauchy 估计，以及最大模原理等都适用于 $A_H(D)$，并且以后我们将经常用到. 关于这方面的内容读者可参见[71].

在第三章里，我们给出了两个重要的定理，即樊氏定理1(基本定理)和 von Neumann 定理. 这一章里，我们将推广上述两个重要定理到解析算子函数，并且也推广第三章的其他一些结果，包括关于解析算子函数的某些性质.

§ 5.1

定义与性质

在给出解析算子函数的定义之前，我们首先证明下面的引

理[114].

引理5.1.1

(i)$A_H(D)$是线性空间;

(ii)若 $f,g\in A_H(D)$,则 $h=f\cdot g\in A_H(D)$;

(iii)设 $f\in A_H(D)$且对每一 $z\in D$,$f(z)$可逆,

则 $f^{-1}\in A_H(D)$,其中 $f^{-1}(z)=f(z)^{-1}(\forall\ z\in D)$.

证明 由[51]中的定理3.10.1知,$f\in A_H(D)$当且仅当对每个 $z\in D$,存在 $f'(z)\in B(H)$使得

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=f'(z)$$

(按算子拓扑意义).于是,容易验证:对于 $f,g\in A_H(D)$和 $\lambda,\mu\in\mathbf{C}$(复数域).我们有

$$(\lambda f+\mu g)'(z)=\lambda f'(z)+\mu g'(z),$$

$$(f\cdot g)'(z)=f'(z)g(z)+f(z)g'(z),$$

并且当 $f(z)$可逆时,

$$f^{-1'}(z)=-f^{-1}(z)f(z)f^{-1}(z).$$

故引理5.1.1得证. ▌

正如前面一样,对于 $T\in B(H)$,$\sigma(T)$仍表示算子 T 的谱,I 表示 H 上的恒等算子.于是我们有下面关于解析算子函数的定义[71].

定义5.1.1 设 $f\in A_H(D)$,$T\in B(H)$且 $\sigma(T)\subseteq D$,我们定义一个从 $B(H)$到 $B(H)$的映射:

$$f(T)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)(zI-T)^{-1}dz,\qquad(5.1.1)$$

其中 Γ 为正定向简单可求长闭曲线,并且 $\sigma(T)$包含在 Γ 的内域 Ω 中,$\Omega\cup\Gamma\subseteq D$.我们称此映射为 Hilbert 空间 H 上的解析算子函数.

注记 (1) 由于 $z\to f(z)(zI-T)^{-1}$在拓扑意义下连续[51],故(5.1.1)的积分在算子拓扑意义下存在,由引理5.1.1和定理

3.11.[51].积分有意义.

(2) 定义5.1.1中定义的解析算子函数与第三章的算子解析函数是有区别的. 前者 $f(z)\in A_H(D)$ 是 D 上的算子值解析函数，后者 $f(z)\in H(D)$ 是 D 上的复值解析函数.

为了后面对解析算子函数的深入讨论，我们先给出在定义5.1.1意义下的解析算子函数的几个基本性质.

性质5.1.1 设 $D=\{z;|z|<R\}(R>0)$，$f\in A_H(D)$，并且其 Taylor 展开式为[71]：

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}B_nz^n, z\in D,$$

其中 $\{B_n\}$ 是 $B(H)$ 中的算子序列. 如果 $T\in B(H)$ 且 $\|T\|<R$，则

$$f(T)=\sum_{n=0}^{\infty}B_nT^n.$$

证明 取 $r>0$ 使得 $\|T\|<r<R$. 设 $M=\max\{\|f(z)\|;|z|=r\}$. 由 Cauchy 估计[71]，$\|B_n\|\leqslant Mr^{-n}$. 从而

$$\left\|\sum_{n=0}^{\infty}B_nT^n\right\|\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}M\cdot\frac{\|T\|^n}{r^n}.$$

因此，级数 $\sum B_nT^n$ 在算子拓扑意义下收敛. 设 φ 是 $B(H)$ 上范数为1的线性函数. 令 $s>0$ 使其 $\|T\|<s<r$. 则

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=s}\sum_{n=0}^{N}\varphi\{B_n(zI-T)^{-1}\}z^ndz\\&=\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=s}\varphi(B_nT^k)z^{n-k-1}dz\\&=\sum_{n=0}^{N}\varphi(B_nT^n),\end{aligned}$$

由此得

$$\begin{aligned}&\left\|\varphi\{f(T)-\sum_{n=0}^{N}B_nT^n\}\right\|\\&=\frac{1}{2\pi}\left\|\int_{|z|=s}\sum_{n>N}\varphi(B_n(zI-T)^{-1}z^n)dz\right\|\end{aligned}$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{n>N}\|\varphi(B_n(se^{i\theta}I-T)^{-1})\|\cdot s^{n+1}d\theta$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{n>N}\|\varphi\|\cdot\|B_n\|\cdot\|(se^{i\theta}I-T)^{-1}\|\cdot s^{n+1}d\theta$$

$$\leqslant M\cdot\max\{\|(zI-T)^{-1}\|;|z|=s\}\cdot\sum_{n>N}r^{-n}s^{n+1}$$

$$\leqslant M_1\cdot s\cdot\sum_{n>N}\left(\frac{s}{r}\right)^n\to 0(n\to\infty).$$

因此

$$f(T)=\sum_{n=0}^{\infty}B_nT^n.$$ ▌

设 f 是 D 到 $B(H)$ 的算子函数，$T\in B(H)$. 我们称 T 与 f 是可交换的，如果对所有 $z\in D$, $Tf(z)=f(z)T$.

性质5.1.2 设 $f,g\in A_H(D)$ 且 $T\in B(H)$，其中 $\sigma(T)\subseteq D$. 则

(i) $(f+g)(T)=f(T)+g(T)$;

(ii) 如果 T 与 g 可交换，则

$$(f\cdot g)(T)=f(T)\cdot g(T);$$

(iii) 如果对于所有 $z\in D$, $f(z)^{-1}$ 存在，并且 T 与 f 可交换，则 $f^{-1}(T)=f(T)^{-1}$，即

$$f(T)^{-1}=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)^{-1}(zI-T)^{-1}dz,$$

其中 Γ 是正定向简单可求长闭曲线，并且 $\sigma(T)$ 包含在 Γ 的内域 Ω 中，$\Omega\cup\Gamma\subseteq D$.

证明 (i) 是明显的.

(ii) 取正定向简单可求长闭曲线 Γ_1,Γ_2 使得 $\sigma(T)$ 包含在 Γ_1 的内域 Ω_1 中，$\Omega_1\cup\Gamma_1$ 包含在 Γ_2 的内域 Ω_2 中并且 $\Omega_2\cup\Gamma_2\subseteq D$. 由于 T 与 g 可交换，于是，对于 $\lambda\in\Gamma_1$, $z\in\Gamma_2$，我们有

$$\begin{aligned}&f(\lambda)(\lambda I-T)^{-1}g(z)(zI-T)^{-1}\\&\quad=f(\lambda)g(z)(\lambda I-T)^{-1}\{(zI-T)-(\lambda I-T)\}\\&\qquad\cdot(zI-T)^{-1}(z-\lambda)^{-1}\end{aligned}$$

$$=f(\lambda)g(z)(\lambda I-T)^{-1}(z-\lambda)^{-1}$$
$$-f(\lambda)g(z)(zI-T)^{-1}(z-\lambda)^{-1}.$$

从而

$$\begin{aligned}
&f(T)g(T)\\
&=\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2\int_{\Gamma_1}f(\lambda)(\lambda I-T)^{-1}d\lambda\int_{\Gamma_2}g(z)(zI-T)^{-1}dz\\
&=\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2\int_{\Gamma_1}\int_{\Gamma_2}f(\lambda)g(z)(\lambda I-T)^{-1}(z-\lambda)^{-1}dzd\lambda\\
&\quad-\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2\int_{\Gamma_1}\int_{\Gamma_2}f(\lambda)g(z)(zI-T)^{-1}(z-\lambda)^{-1}dzd\lambda\\
&=\left(\frac{1}{2\pi i}\right)\int_{\Gamma_1}f(\lambda)(\lambda I-T)^{-1}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}g(z)(z-\lambda)^{-1}dz\right\}d\lambda\\
&\quad-\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2\int_{\Gamma_2}\left\{\int_{\Gamma_1}f(\lambda)(z-\lambda)^{-1}d\lambda\right\}g(z)(zI-T)^{-1}dz\\
&=A_1+A_2.
\end{aligned}$$

上面积分顺序交换是由被积函数在$\Gamma_1\times\Gamma_2$上关于(λ,z)在算子拓扑意义下连续所保证的. 由[71]中的定理3.11.1,3.11.3,我们有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}g(z)(z-\lambda)^{-1}dz=g(\lambda),$$

$$\int_{\Gamma_1}f(\lambda)(z-\lambda)^{-1}d\lambda=0.$$

因此,$A_2=0$,并且

$$A_1=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}f(\lambda)g(\lambda)(\lambda I-T)^{-1}d\lambda=(f\cdot g)(T).$$

故$f(T)g(T)=(f\cdot g)(T)$. 显然,(iii)是(ii)的推论. 证毕. ∎

性质5.1.3 设$f\in A_H(D_1)$,$g\in A_H(D_2)$,并且对于D_2的任一紧子集K_2,存在D_1的紧子集K_1使得对每个$z\in K_2$,均有$\sigma(g(z))$包含在K_1内. 则$h=f\circ g\in A_H(D_2)$. 特别地,如果$g(z)=\hat{g}(z)I$,其中$\hat{g}$是D_2到D_1的复值解析函数,则$h=f\circ g\in A_H(D_2)$.

证明 设$z_0\in D_2$. 令$r>0$使其$\{z;|z-z_0|\leqslant r\}\subseteq D_2$. 设$\Gamma_2=\{z;|z-z_0|=r\}$,$\Omega_2=\{z;|z-z_0|<r\}$以及$K_1$是$D_1$的紧子集使得

对于$|z-z_0|\leqslant r$，$\sigma(g(z))\subseteq K_1$. 取一正定向简单可求长闭曲线$\Gamma_1$使得$\Gamma_1$的内域$\Omega_1$包含$K_1$，并且$\Omega_1\cup\Gamma_1\subseteq D_1$. 则对于$z\in\Omega_2$，我们有

$$h(z)=f(g(z))=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}f(w)(wI-g(z))^{-1}dw.$$

因为对任意固定的$w\in\Gamma_1$，$z\to(wI-g(z))^{-1}$在$\Omega_2=\{z;|z-z_0|<r\}$内解析，所以，由性质5.1.2，对于$w\in\Gamma_1$，$z\in\Omega_2$，有

$$(wI-g(z))^{-1}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}(wI-g(u))^{-1}(u-z)^{-1}du,$$

从而

$$h(z)=\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2\int_{\Gamma_1}\int_{\Gamma_2}f(w)(wI-g(u))^{-1}(u-z)^{-1}dudw,z\in\Omega_2.$$

设φ是$B(H)$上的任一有界线性泛函. 令

$$m(w,u)=\varphi(f(w)(wI-g(u))^{-1},w\in\Gamma_1,u\in\Gamma_2,$$

$$M(w,z)=\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2\int_{\Gamma_2}m(w,u)(u-z)^{-1}du,w\in\Gamma_1,z\in\Omega_2.$$

则

$$\varphi(h(z))=\int_{\Gamma_1}M(w,z)dw,z\in\Omega_2.$$

由于$m(w,u)$在$\Gamma_1\times\Gamma_2$上连续，于是对于每个固定的$w\in\Gamma_1$，$M(w,z)$是Ω_2上关于z的复值解析函数，并且对于每个固定的$z\in\Omega_2$，$M(w,z)$是Γ_1上关于w的连续函数. 因此，$\varphi(h(z))$在Ω_2上解析，即为我们所定义的h. 故性质5.1.3获证. ▌

性质5.1.4 设$f\in A_H(D_1)$，$g\in A_H(D_2)$为性质5.1.3中所设. 如果$T\in B(H)$与g可交换，并且$\sigma(T)\subseteq D_2$，$\sigma(g(T))\subseteq D_1$，则

$$(f\circ g)(T)=f(g(T)).$$

证明 取一正定向简单可求长闭曲线Γ_2使得Γ_2的内域Ω_2包含$\sigma(T)$且$\Omega_2\cup\Gamma_2\subseteq D_2$. 由条件假设，对于所有$z\in\Omega_2\cup\Gamma_2$，存在$D_1$的紧子集$K_1$，有$\sigma(g(z))\subseteq K_1$. 则取一正定向简单可求长闭曲

线 Γ_1 使其 $\sigma(g(T))$ 以及 K_1 被包含在 Γ_1 的内域 Ω_1 中且 $\Omega_1\cup\Gamma_1\subseteq D_1$. 于是,我们有

$$f(g(T))=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} f(w)(wI-g(T))^{-1}dw.$$

由性质5.1.2,对于 $w\in\Gamma_1$,

$$(wI-g(T))^{-1}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}(wI-g(z))^{-1}(zI-T)^{-1}dz.$$

因此,

$$\begin{aligned}f(g(T))&=\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2\int_{\Gamma_1}\int_{\Gamma_2} f(w)(wI-g(z))^{-1}(zI-T)^{-1}dzdw\\&=\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2\int_{\Gamma_2}\left[\int_{\Gamma_1} f(w)(wI-g(z))^{-1}dw\right](zI-T)^{-1}dz\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2} f(g(z))(zI-T)^{-1}dz\\&=(f\circ g)(T).\end{aligned}$$

由于 $(wI-g(z))^{-1}$ 在 $\Gamma_1\times\Gamma_2$ 上关于 (w,z) 连续[71],从而整个被积函数亦连续,保证了积分的可变换性. 故性质5.1.4得证. ∎

我们以 $N_H(D)$ 表示所有 $f\in A_H(D)$ 使得对 $z,w\in D$,都有 $f(z)f(w)=f(w)f(z)$, $f(z)f(z)^*=f(z)^*f(z)$ 的解析算子值函数构成的集合. 显然,如果 $\tilde{f}$ 是 D 上复值解析函数,那么 $f(z)=\tilde{f}(z)I\in N_H(D)$.

性质5.1.5 设 $D=\{z;|z|<R\}(R>0)$. 假设 $f,g\in A_H(D)$,且其 Taylor 展开式分别为

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}B_nz^n, z\in D,$$

$$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}C_nz^n, z\in D;$$

其中 $\{B_n\}$, $\{C_n\}$ 均为 $B(H)$ 中的算子序列. 则

(i) 对于 $z,w\in D$, $f(z)g(w)=g(w)f(z)$ 当且仅当对所有 $n,m=0,1,2,\cdots$, $B_nC_m=C_mB_n$;

(ii) $f\in N_H(D)$当且仅当$\{B_n\}$是两两可换的正常算子序列；

(iii) 假设对每个$z\in D$，$f(z)^{-1}$存在，则$f\in N_H(D)$当且仅当$f^{-1}\in N_H(D)$.

证明 (i) 设$T\in B(H)$. 我们要证如果T与f可交换，则T与所有$B_n(n=0,1,2,\cdots)$可交换. 事实上，因为$Tf(0)=f(0)T$，所以$TB_0=B_0T$. 因此，对于所有$z\in D$且$z\neq 0$，我们有

$$T\Big(\sum_{n=1}^{\infty}B_nz^{n-1}\Big)=\Big(\sum_{n=1}^{\infty}B_nz^{n-1}\Big)T.$$

由于f在D内按算子拓扑连续，则

$$TB_1=\lim_{z\to 0}T\Big(\sum_{n=1}^{\infty}B_nz^{n-1}\Big)=\lim_{z\to 0}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}B_nz^{n-1}\Big)T=B_1T.$$

于是，根据数学归纳法可证：对于$n=0,1,2,\cdots$，$TB_n=B_nT$. 因此，对任意固定的$w\in D$，

$$g(w)f(z)=f(z)g(w),\ \forall\ z\in D.$$

从而

$$g(w)B_n=B_ng(w),n=0,1,2,\cdots.$$

于是，由w的任意性($|w|<R$)，我们得

$$B_nC_m=C_mB_n,\quad n,m=0,1,2,\cdots.$$

反之，如果对于任意的$n,m=0,1,2,\cdots$，$B_nC_m=C_mB_n$，则易知对于$z,w\in D$，

$$f(z)g(w)=g(w)f(z).$$

(ii) 假设$f\in N_H(D)$. 则对于$z,w\in D$，

$$f(z)f(w)=f(w)f(z).$$

从而

$$B_nB_m=B_mB_n,\quad n,m=0,1,2,\cdots.$$

由于对任一$z\in D$，$f(z)$是正常算子，于是，根据Fuglede-Putnam-Rosenblum定理[105]，我们有

$$f(w)f(z)^*=f(z)^*f(w),z,w\in D.$$

从而

$$B_nB_m^* = B_m^* B_n,\quad n,m=0,1,2,\cdots.$$

因此,$\{B_n\}$即为我们所需要的算子序列.

反之,如果$\{B_n\}$是可交换的正常算子序列,显然,$f\in N_H(D)$.

(iii) 显然. 性质5.1.5证毕. ▌

性质5.1.6 假设 $B_1,B_2,\cdots,B_k$ 是复 Hilbert 空间上的正常算子,并且

(1) $B_nB_m=B_mB_n, n,m=1,2,\cdots,k$;

(2) $\|B_n\|<1, n=1,2,\cdots,k$.

则存在一个单位分解$\{E_t;0\leqslant t\leqslant 1\}$使得

(a) 如果$T\in B(H)$与$B_n(n=1,2,\cdots,k)$可交换,则T与E_t $(0\leqslant t\leqslant 1)$可交换;

(b) $\forall\ \varepsilon>0$,存在简单函数$\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_k$满足下面条件:

$$\left\|B_n\int_0^1\psi_n(t)dE_t\right\|<\varepsilon,$$

$$\max\{|\psi_n(t)|;0\leqslant t\leqslant 1\}<2, n=1,2,\cdots,k.$$

在给出证明之前,先对这里的$[0,1]$上的简单函数ψ作如下解释:$[0,1]$上的简单函数在此表示存在区间$\beta_s=(\alpha_s,\alpha_{s+1}]$,$\alpha_s<\alpha_{s+1}$, $s=1,2,\cdots,p(p<\infty)$且$[0,1]\subseteq\bigcup_{s=1}^{p}\beta_s$以及复数$c_1,c_2,\cdots,c_p$使得

$$\psi(t)=\sum_{s=1}^{p}c_s\chi_{\beta_s}(t), t\in[0,1],$$

其中χ_{β_s}是β_s的特征函数. 则我们定义

$$\int_0^1\psi(t)dE_t=\sum_{s=1}^{p}c_sE(\beta_s).$$

证明 首先,我们假设B_n都是 Hermite 算子. 设

$$T_n=(2+r)^{-1}(B_n+I+rI), r>0.$$

则$\sigma(T_n)\subseteq[0,1]$,并且$T_nT_m=T_mT_n, n=1,2,\cdots$. 由[104]中的定理,存在一单位分解$\{E_t;0\leqslant t\leqslant 1\}$使得

(a) 如果$T\in B(H)$与T_n可交换,则T与E_t可交换;

(b) $\forall\ \varepsilon>0$,存在$[0,1]$上的简单函数$\hat\varphi_1,\hat\varphi_2,\cdots,\hat\varphi_k$具有如下

性质：

$$0\leqslant\hat{\varphi}(t)\leqslant 1,$$

$$\left\|T_n-\int_0^1\hat{\varphi}(t)dE_t\right\|<\frac{\varepsilon}{2+r}.$$

令

$$\varphi_n(t)=(2+r)\hat{\varphi}_n(t)-1-r.$$

则

$$-1-r\leqslant\varphi_n(t)\leqslant 1,$$

$$\left\|B_n-\int_0^1\varphi_n(t)dE_t\right\|<\varepsilon, n=1,2,\cdots,k.$$

显然，当 r 充分小时，$\{E_t;0\leqslant t\leqslant 1\}$ 以及 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_k$ 具有所需的性质.

其次，假设 $B_1,B_2,\cdots,B_k$ 是正常压缩算子，并使得

$$B_n=A_{2n-1}+iA_{2n}, n=1,2,\cdots,k,$$

其中 $A_1,A_2,\cdots,A_{2k}$ 是 Hermite 压缩算子. 因为 B_n 两两可交换，所以，由 F. P. R. 定理[105]，$A_1,\cdots,A_{2k}$ 亦是两两可交换的. 因此，我们有一单位分解 $\{E_t;0\leqslant t\leqslant 1\}$ 和简单函数 $\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_{2k}$ 使得

(a_1) 如果 $T\in B(H)$ 与 B_n 可交换，从而与 A_n 可交换，则 $TE_t=E_tT, t\in[0,1]$；

(a_2) $\left\|A_j-\int_0^1\psi_j(t)dE_t\right\|<\frac{1}{2}\varepsilon, j=1,2,\cdots,2k$；

(a_3) $-1-r\leqslant\psi_j(t)\leqslant 1, j=1,2,\cdots,2k.$

令 $\varphi_n(t)=\psi_{2n-1}+i\psi_{2n}(t)$，并且取 r 充分小. 则 $\{E_t;0\leqslant t\leqslant 1\}$ 以及 $\varphi_1,\cdots,\varphi_k$ 就是我们所需要的. 故性质5.1.6获证. ∎

§5.2

解析算子函数的基本定理

在§3.1中我们证明了关于算子解析函数的基本定理，即樊氏

定理1(定理3.1.1).下面的定理5.2.1[134]将推广这一定理到解析算子函数的情形.

定理5.2.1 设H是复Hilbert空间;$f\in N_H(\Delta)$,并且对于$z\in\Delta$,$\|f(z)\|<1$.如果$T\in B(H)$是一真压缩算子,并且对于$z\in\Delta$,$Tf(z)=f(z)T$,则$\|f(T)\|<1$.

证明 假设

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}B_nz^n,z\in\Delta.$$

由性质5.1.5,$\{B_n\}$是两两可交换的正常算子序列,并且$TB_n=B_nT$,$n=0,1,2,\cdots$.选取一正数r使其$\|T\|<r<1$.由于f在Δ内解析且对每个$z\in\Delta$,$\|f(z)\|<1$,于是,由解析向量函数的最大模原理[71],对某个正数δ,我们有

$$\max\{\|f(z)\|;|z|=r\}=1-\delta.$$

由Cauchy估计[71],利用$\|f(z)\|<1(z\in\Delta)$可推出

$$\|B_n\|\leqslant 1,n=1,2,\cdots.$$

设m是一正整数并使得

$$\sum_{n>m}^{\infty}r^n<\frac{\delta}{8}.$$

于是

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{n=0}^{\infty}B_nT^n\right\|&\leqslant\left\|\sum_{n=0}^{m}B_nT^n\right\|+\sum_{n>m}^{\infty}\|B_n\|\cdot\|T\|^n\\&\leqslant\left\|\sum_{n=0}^{m}B_nT^n\right\|+\sum_{n>m}^{\infty}r^n\\&\leqslant\left\|\sum_{n=0}^{m}B_nT^n\right\|+\frac{\delta}{8},\end{aligned}$$

因此,如果我们能证明下面不等式成立:

$$\left\|\sum_{n=0}^{m}B_nT^n\right\|<1-\frac{\delta}{8},\tag{5.2.1}$$

则定理的证明完成.下面证明(5.2.1)式成立.

因为$B_0,B_1,\cdots,B_m$是两两可交换的正常压缩算子,由性质

5.1.6导出：存在一单位分解$\{E_t; 0\leqslant t\leqslant 1\}$以及$[0,1]$上的简单函数$\Phi_0,\Phi_1,\cdots,\Phi_m$

$$\Phi_n(t)=\sum_{k=1}^{p_n} c_k^{(n)}\chi_{\beta_k^{(n)}}(t),n=0,1,2,\cdots,m,$$

使得

(a) $TE_t=E_tT, t\in[0,1]$;

(b) $\left\|B_n-\int_0^1\Phi_n(t)dE_t\right\|<\delta/8(m+1), n=0,1,2,\cdots,m.$

显然，$\Phi_0,\Phi_1,\cdots,\Phi_m$可以写成如下形式：

$$\Phi_n(t)=\sum_{k=1}^{p} s_k^{(n)}\chi_{\beta_k}(t),n=0,1,2,\cdots,m,$$

并且假设$E(\beta_k)=0$时$s_k^{(n)}=0, n=0,1,2,\cdots,m.$

令

$$\Phi(t,z)=\sum_{n=0}^{m}\Phi_n(t)z^n, t\in[0,1], z\in\Delta,$$

即

$$\Phi(t,z)=\sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{n=0}^{m}s_k^{(n)}z^n)\chi_{\beta_k}(t)\right).$$

则必有

$$|\Phi(t,z)|<1-\frac{\delta}{2}, t\in[0,1], |z|<r.$$

否则，存在$t_0\in[0,1]\cap\beta_k$, $|z_0|\leqslant r$使得

$$|\Phi(t_0,z_0)|\geqslant 1-\frac{\delta}{2},$$

即

$$\left|\sum_{n=0}^{m}s_k^{(n)}z_0^n\right|\geqslant 1-\frac{\delta}{2}.$$

因为，对于$|z|\leqslant r$,

$$\left\|\sum_{n=0}^{m}\int_0^1\Phi_n(t)dE_tz^n\right\|$$

$$\leqslant\left\|\sum_{n=0}^{m}\left[B_n-\int_0^1\Phi_n(t)dE_t\right]z^n\right\|+\left\|\sum_{n=0}^{m}B_nz^n\right\|$$

$$\leqslant \sum_{n=0}^{m} \left\| B_n - \int_0^1 \Phi_n(t) dE_t \right\| \cdot |z|^n + \left\| \sum_{n=0}^{\infty} B_n z^n \right\| + \left\| \sum_{n>m}^{\infty} B_n z^n \right\|$$

$$\leqslant \frac{\delta}{8} + 1 - \delta + \frac{\delta}{8} = 1 - \frac{3}{4}\delta,$$

所以，我们有

$$\left| \sum_{n=0}^{m} s_k^{(n)} z_0^n \right| > \left\| \sum_{n=0}^{m} \int_0^1 \Phi_n(t) dE_t z_0^n \right\|.$$

由我们的假设，$E(\beta_k) \neq 0$. 取 $x \in E(\beta_k)H$，$x \neq 0$. 则

$$\left| \sum_{n=0}^{m} s_k^{(n)} z_0^n \right| \|E(\beta_k)x\|$$

$$> \left\| \sum_{n=0}^{m} \int_0^1 \Phi_n(t) dE_t z_0^n \right\| \|E(\beta_k)x\|$$

$$\geqslant \left\| \sum_{n=0}^{m} s_k^{(n)} z_0^n E(\beta_k) x \right\|$$

$$= \left| \sum_{n=0}^{m} s_k^{(n)} z_0^n \right| \|E(\beta_k)x\|$$

此矛盾证明了对 $t \in [0,1]$，$|z| \leqslant r$，有

$$\left| \sum_{n=0}^{m} \Phi_n(t) z^n \right| = |\Phi(t,z)| < 1 - \frac{\delta}{2}.$$

由基本定理，即定理3.1.1，对于任意 $t \in [0,1]$，我们有

$$\left\| \sum_{n=0}^{m} \Phi_n(t) T^n \right\| < 1 - \frac{\delta}{2},$$

或者

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant p} \left\| \sum_{n=0}^{m} s_k^{(n)} T^n \right\| < 1 - \frac{\delta}{2}.$$

因此，由 $TE_t = E_t T$，$t \in [0,1]$，对于 $x \in H$，我们有

$$\left\| \sum_{n=0}^{m} B_n T^n x \right\| \leqslant \left\| \sum_{n=0}^{m} \int_0^1 \Phi_n(t) dE_t T^n x \right\|$$

$$+ \left\| \sum_{n=0}^{m} \left[B_n - \int_0^1 \Phi_n(t) dE_t \right] T^n x \right\|$$

$$\leqslant \left\| \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{n=0}^{m} s_k^{(n)} T_n \right) E(\beta_k) x \right\|$$

$$+\sum_{n=0}^{m}\left\|B_n-\int_0^1\Phi_n(t)dE_t\right\|\cdot\|T^n\|\cdot\|x\|$$

$$\leqslant\left\{\sum_{k=1}^{p}\left\|E(\beta_k)\sum_{n=0}^{m}s_k^{(n)}T^n x\right\|^2\right\}^{\frac{1}{2}}+\frac{\delta}{8}\|x\|$$

$$\leqslant\|x\|\left[\frac{\delta}{8}+\max\left\{\left\|\sum_{n=0}^{m}s_k^{(n)}T^n\right\|;1\leqslant k\leqslant p\right\}\right]$$

$$\leqslant\|x\|\left(1-\frac{3}{8}\delta\right).$$

由此可得

$$\left\|\sum_{n=0}^{m}B_nT^n\right\|<1-\frac{3}{8}\delta<1-\frac{\delta}{8},$$

即(5.2.1)成立. 定理5.2.1获证. ∎

注1 在定理5.2.1中不必假设 T 为正常算子. 另一方面,假设真压缩算子 T 与算子函数 f 可交换似乎太强,但这个条件一般不能去掉. 例如:设 H 是2-维复 Hilbert 空间,其中$\{e_1,e_2\}$为正交基. 对于 $x=\lambda e_1+\mu e_2$,定义:

$$Tx=\frac{3}{4}\lambda e_2,$$

$$Bx=\frac{3}{4}\mu e_1.$$

易证:B 是 Hermite 算子,$BT=0$且$\|B\|=\|T\|=\frac{3}{4}$.

考虑算子函数:

$$f(z)=(z-B)(I-Bz)^{-1},z\in\Delta.$$

由引理3.3.1,对于 $z\in\Delta$,我们有

$$\|f(z)\|<1.$$

显然,$f\in N_H(\Delta)$,并且

$$f(z)=(z-B)\left(I+\sum_{n=1}^{\infty}B^nz^n\right)$$

$$=z-B+\sum_{n=1}^{\infty}B^nz^{n+1}-\sum_{n=1}^{\infty}B^{n+1}z^n.$$

由性质5.1.1，以及 $BT=0$，我们得

$$f(T)=T-B+\sum_{n=1}^{\infty}B^{n}T^{n+1}-\sum_{n=1}^{\infty}B^{n+1}T^{n}$$
$$=T-B.$$

但$\|T-B\|>1$，即$\|f(T)\|>1$.

注2 上定理的证明用到了自伴算子单位分解的逼近定理以及樊氏定理1. 另一证明避开了这两个定理，详细情况可参见[114].

利用定理5.2.1，也可以推广 von Neumann 定理.

定理5.2.2[114] 设 $\delta>0$ 且 $D=\{z; |z|<1+2\delta\}$. 又设 $f\in N_H(D)$，其中对于 $|z|\leqslant 1$，$\|f(z)\|\leqslant 1$. 如果 $T\in B(H)$ 是压缩算子（$\|T\|\leqslant 1$），并且与 f 可交换，则$\|f(T)\|\leqslant 1$.

证明 设

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}B_n z^n, z\in D,$$

其中$\{B_n\}$是两两可交换的正常算子序列（性质5.1.5）. 如果对于所有 $n\geqslant 1$，$B_n=0$，则定理显然成立. 其次，假设对于 $z\in\Delta$，$\|f(z)\|\neq 1$. 则由解析向量函数的最大模原理[71]，

$$\|f(z)\|<1, z\in\Delta=\{z; |z|<1\}.$$

对于$0<r<1$，由定理5.2.1得$\|f(rT)\|<1$. 根据解析向量函数的 Cauchy 估计[71]，我们有

$$\|B_n\|\leqslant M(1+\delta)^{-n},$$

其中 $M=\max\{\|f(z)\|; |z|\leqslant 1+\delta\}$. 从而

$$\|f(T)\|\leqslant\|f(T)-f(rT)\|+\|f(rT)\|$$
$$<1+(1-r)\sum_{n=1}^{\infty}\|B_n\|\cdot n\cdot\|T^n\|$$
$$\leqslant 1+(1-r)M\sum_{n=1}^{\infty}n(1+\delta)^{-n}.$$

令 r 单调增地趋于1，则$\|f(T)\|\leqslant 1$. 最后，设$\|f(z)\|=1$（$z\in\Delta$）. 由上面证明方法，我们可得$\|f(T)\|\leqslant 1$. 故定理5.2.2得证. ∎

类似于定理3.1.3的证明可得下面定理5.2.3[114].

定理5.2.3 设 $f\in N_H(\Delta)$. 对于 $0\leqslant r<1$,令

$$M(r)=\max\{\|f(z)\|;|z|=r\}.$$

则

$$M(r)=\max\{\|f(T)\|;\|T\|\leqslant r\},$$

其中 T 与 f 可交换.

为了叙述的简便,我们引入下面的记号:

$$\Pi_+=\{z;\mathrm{Re}z>0\},$$

$$\Pi=\{z;\mathrm{Re}z\geqslant 0\},$$

$$\Pi_{-\delta}=\{z;\mathrm{Re}z>-\delta\}(\delta>0).$$

下面我们给出与定理5.2.1有关的两个定理. 不加以证明. 详细证明见引文.

定理5.2.4[114] 设 H 是复 Hilbert 空间. 则

(i) 设 $f\in N_H(\Delta)$,其中 $\mathrm{Re}f(z)>0$,即对于 $z\in\Delta$,$\frac{1}{2}(f(z)+f(z)^*)>0$,以及 $T\in B(H)$ 为与 f 可交换的真压缩算子. 则 $\mathrm{Re}f(T)>0$.

(ii) 设 $f\in N_H(\Pi_+)$,其中对于 $z\in\Pi_+$,$\|f(z)\|<1$. 如果 $T\in B(H)$ 与 f 可交换且 $\mathrm{Re}T>0$,则 $\|f(T)\|<1$.

(iii) 如果 $f\in N_H(\Pi_{-\delta})(\delta>0)$ 对于 $z\in\Pi$ 有 $\|f(z)\|\leqslant 1$,并且 $T\in B(H)$ 与 f 可交换且 $\mathrm{Re}T\geqslant 0$,则 $\|f(T)\|\leqslant 1$.

(iv) 设 $f\in N_H(\Pi_+)$. 则对任意 $r>0$,

$$\max\{\|f(z)\|;\mathrm{Re}z\geqslant r\}=\max\{\|f(T)\|;\mathrm{Re}T\geqslant rI\},$$

其中 T 与 f 可交换.

定理5.2.5[114] 设 D 和 S 是复平面区域,并且 $A(D,S)$ 表示 D 到 S 的复值解析函数集合. 则

(i) 如果 $F\in A(\Delta,D)$,$G\in A(D,\Delta)$,则 $\|G(F(T))\|<1$,其中 $T\in B(H)$ 为真压缩算子.

(ii) 设 $F\in A(\Delta,D)$,$G\in A(D,\Pi_+)$. 则 $\mathrm{Re}G(F(T))>0$,其

中$T\in B(H)$为真压缩算子.

(iii) 设$F\in A(\Pi_+,D)$,$G\in A(D,\Delta)$. 则对于$T\in B(H)$且$\mathrm{Re}T>0$,$\|G(F(T))\|<1$.

(iv) 设$F\in A(\Pi_+,D)$,$G\in A(D,\Pi_+)$. 则对于$T\in B(H)$且$\mathrm{Re}T>0$,$\mathrm{Re}G(F(T))>0$.

§ 5.3

解析算子函数的几个重要定理

对于两个定义在区域D上的算子值函数f,g,我们称f与g可交换,如果对所有$z,w\in D$,$f(z)g(w)=g(w)f(z)$. 在第三章里,我们给出了算子解析函数的Schwarz引理,Pick定理以及Julia引理等. 同样,对于解析算子函数也有类似的结果[114].

定理5.3.1(Schwarz引理) 设H是复Hilbert空间,$f=g\cdot h$,其中$g\in A_H(\Delta)$,$h\in N_H(\Delta)$使得$\|h(z)\|\leqslant 1(z\in\Delta)$,并且当$h$不恒为常函数时,$\|h(z)\|\neq 1$. 假设$T\in B(H)$为真压缩算子.

(i) 如果T与h可交换,则

$$g(T)g(T)^*\geqslant f(T)f(T)^*, \tag{5.3.1}$$

$$\|g(T)\|\geqslant\|f(T)\|. \tag{5.3.2}$$

当$h(z)\neq N$时,其中N是某一范数为1的正常算子,(5.3.1)为严格不等式当且仅当$g(T)g(T)^*>0$.

(ii) 设T分别与h和g可交换,并且h与g可交换. 则我们也有

$$g(T)^*g(T)\geqslant f(T)^*f(T), \tag{5.3.3}$$

以及(5.3.1)、(5.3.2)成立. (5.3.3)的严格不等式成立当且仅当$g(T)^*g(T)>0$并且$h(z)\neq N$,其中N是某一范数为1的正常算子.

(iii)　如果(5.3.2)的等式成立，则 $g(T)=0$ 或 $h(z)\equiv N$，$\|N\|=1$；如果 $g(T)=0$ 或 $h(z)\equiv U$，其中 U 是酉算子，则(5.3.2)的等式成立.

证明　(i)　由性质5.1.2，我们有

$$f(T)=g(T)h(T).$$

从而

$$g(T)g(T)^*-f(T)f(T)^*=g(T)\{I-h(T)h(T)^*\}g(T)^*. \tag{5.3.4}$$

另一方面，对于 $\forall\ x\in H$，

$$\begin{aligned}(f(T)f(T)^*x,x)&=\|f(T)^*x\|^2\leqslant\|h(T)^*\|^2\|g(T)^*x\|^2\\&=\|h(T)\|^2(g(T)g(T)^*x,x).\end{aligned}$$

于是

$$g(T)g(T)^*-f(T)f(T)^*\geqslant(1-\|h(T)\|^2)g(T)g(T)^*. \tag{5.3.5}$$

如果 $h(z)\equiv N$，$\|N\|=1$，则 $h(T)=N$，从而 $1-\|h(T)\|^2=0$. 如果 $h(z)\not\equiv N$，$\|N\|=1$，则由解析向量值函数的最大模原理[71]，对于 $z\in\Delta$，$\|h(z)\|<1$. 因此，由定理5.2.1，$\|h(T)\|<1$，即 $1-\|h(T)\|^2\geqslant 0$. 故由(5.3.5)可导出(5.3.1). 显然，由(5.3.1)必有(5.3.2). 利用(5.3.4)式，当 $h(z)\not\equiv N$，$\|N\|=1$ 时，容易推出：(5.3.1)的等式成立当且仅当 $g(T)g(T)^*>0$.

现在证明(ii). 类似可证除了(5.3.1)与(5.3.2)式成立外，(5.3.3)也成立. 下面我们要证：若 $g(T)g(T)^*>f(T)f(T)^*$，必有 $h(z)\not\equiv N$ 且 $\|N\|=1$. 否则，如果 $h(z)\equiv N$ 且 $\|N\|=1$. 由 h 的定义知，N 为正常算子. 因为 h 与 g 可交换，并且 T 分别与 h，g 可交换，所以，由性质5.1.2，

$$f(T)=Ng(T)=g(T)N.$$

从而，由 Fuglede-Putmau-Rosenblum 定理[105]，N^* 与 $g(T)$ 亦可交换. 于是(5.3.4)又可写为：

$$g(T)g(T)^*-f(T)f(T)^*=(1-NN^*)g(T)g(T)^*.$$

然而，由 $g(T)g(T)^*>f(T)f(T)^*$ 可知 $g(T)g(T)^*$ 以及 $[g(T)g(T)^*-f(T)f(T)^*]$ 是可逆的. 因此，$(I-NN^*)$ 亦可逆，即 $\|N\|<1$. 这与 $\|N\|=1$ 矛盾. 故(ii)得证.

最后，证明(iii). 假设(5.3.2)的等式成立. 现要证：若 $g(T)\neq 0$，则 $h(z)\equiv N$ 且 $\|N\|=1$. 否则，如果 $h(z)\not\equiv N$，$\|N\|=1$，则由前面的证明，$\|h(T)\|<1$. 于是，由 $f(T)=g(T)h(T)$，我们有

$$\|f(T)\|\leqslant\|h(T)\|\|g(T)\|<\|g(T)\|.$$

这与 $\|f(T)\|=\|g(T)\|$ 矛盾. 故 $h(z)\equiv N$，其中 N 为范数为1的正常算子. 另一情形留给读者证明. ∎

推论5.3.1 设 $f\in N_H(\Delta)$，其中对于 $z\in\Delta$，$\|f(z)\|<1$，并且设 $T\in B(H)$ 是一真压缩算子且与 f 可交换. 如果 $f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(n-1)}(0)=0$，则

$$T^nT^{*n}\geqslant f(T)f(T)^*, \tag{5.3.6}$$

$$T^{*n}T^n\geqslant f(T)^*f(T), \tag{5.3.7}$$

$$\|T^n\|\geqslant\|f(T)\|. \tag{5.3.8}$$

如果 $f(z)\neq z^nh(z)$，其中 h 不为常函数，但 $\|h(z)\|=1$，则(5.3.6)，(5.3.7)的严格不等式成立当且仅当分别有 $T^nT^{*n}>0$，$T^{*n}T^n>0$，并且 $f(z)\neq Nz^n$，其中 N 是范数为1的正常算子. 如果(5.3.8)的等式成立，则 $T^n=0$ 或者 $f(z)=Nz^n$ 且 $\|N\|=1$；如果 $T^n=0$ 或者 $f(z)=Uz^n$，其中 U 为酉算子，则(5.3.8)的等式成立.

在证明解析算子函数的 Pick 定理[114]之前，我们先证明下面一个引理.

引理5.3.1 设 A，B 是 Hilbert 空间 H 上的有界线性算子，并且 B 可逆. 如果 δ 是一正实数，则

(i) $\|AB^{-1}\|<\delta$ 当且仅当 $A^*A<\delta^2B^*B$.

(ii) $\|AB^{-1}\|\leqslant\delta$ 当且仅当 $A^*A\leqslant\delta^2B^*B$.

证明 (i) 可由 $\|AB^{-1}\|<\delta$ 等价于 $B^{*-1}A^*AB^{-1}<\delta^2I$ 直接得到.

(ii) 由于 $\|AB^{-1}\|\leqslant\delta$ 当且仅当对每一正整数 n，均有 $\|A$

$B^{-1}\| < \delta + \frac{1}{n}$. 而由(i)可知, $\|AB^{-1}\| < \delta + \frac{1}{n}$ 等价于 $A^*A < (\delta + \frac{1}{n})^2 B^*B$. 令 $n \to \infty$, 即为所证. ∎

定理5.3.2(Pick 定理) 设 H 是复 Hilbert 空间. 设 $f \in N_H(\Delta)$ 且 $\|f(z)\| < 1 (z \in \Delta)$ 以及 $T \in B(H)$ 是与 f 可交换的真压缩算子(不必是正常算子). 如果 B 是一正常的真压缩算子并且分别与 T 和 f 可交换, 则

$$(I-T^*B)^{-1}(T^*-B^*)(T-B)(I-B^*T)^{-1}$$
$$\geqslant \{I-f(T)^*f(B)\}^{-1}\{f(T)^*-f(B)^*\}$$
$$\cdot\{f(T)-f(B)\}\{I-f(B)^*f(T)\}^{-1}, \quad (5.3.9)$$

$$(T-B)(I-B^*T)^{-1}(I-T^*B)^{-1}(T^*-B^*)$$
$$\geqslant \{f(T)-f(B)\}\{I-f(B)^*f(T)\}^{-1}\{I-f(T)^*f(B)\}^{-1}$$
$$\cdot\{f(T)^*-f(B)^*\}, \quad (5.3.10)$$

$$\|(T-B)(I-B^*T)^{-1}\|$$
$$\geqslant \|\{f(T)-f(B)\}\{I-f(B)^*f(T)\}^{-1}\|. \quad (5.3.11)$$

证明 定义 μ_B 如下:

$$\mu_B(z) = (z+B)(I+B^*z)^{-1}, z \in \Delta.$$

显然, $\mu_B \in N_H(\Delta)$, 并由引理5.3.1,

$$\|\mu_B(z)\| < 1, z \in \Delta.$$

考虑"复合函数":

$$F(z) = (f \circ \mu_B)(z), z \in \Delta,$$

其中 $(f \circ \mu_B)(z) = f(\mu_B(z))$. 假设 K_2 是 Δ 的一紧子集. 由解析向量函数的最大模原理[71], 我们有

$$\max\{\|\mu_B(z)\|; z \in K_2\} = r < 1,$$

从而, 对于所有 $z \in K_2$, 有

$$\sigma(\mu_B(z)) \subseteq K_1 = \{w, |w| \leqslant r\}.$$

于是, 由性质5.1.3, $F \in A_H(\Delta)$. 由于 B 与 f 可交换, 即对于每个 $z \in \Delta$, $\mu_B(z)$ 亦与 f 可交换, 因此, 由定理5.2.1,

$$\|f(\mu_B(z))\|<1, z\in\Delta,$$

即

$$\|F(z)\|<1, z\in\Delta. \qquad (5.3.12)$$

对于 $z\in\Delta$，定义

$$g(z)=\{F(z)-f(B)\}\{I-f(B)^*F(z)\}^{-1}. \qquad (5.3.13)$$

由(5.3.12)以及 $\|f(B)^*\|=\|f(B)\|<1$（由定理5.2.1）易知(5.3.13)定义的 g 有意义. 于是，根据引理5.1.1，我们有 $g\in A_H(\Delta)$. 下面我们再证明 $g\in N_H(\Delta)$，$\|g(z)\|<1(z\in\Delta)$ 且 $g(0)=0$. 设

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}A_nz^n, z\in\Delta.$$

则由性质5.1.2，

$$f(B)=\sum_{n=0}^{\infty}A_nB^n \qquad (5.3.14)$$

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\{\mu_B(z)\}^n, z\in\Delta. \qquad (5.3.15)$$

因为 $f\in N_H(\Delta)$ 且 B 为与 f 可交换的正常真压缩算子，于是，由性质5.1.5，$F\in N_H(\Delta)$，并且对于 $z\in\Delta$，

$$F(z)f(B)=f(B)F(z), F(z)f(B)^*=f(B)^*F(z).$$

故 $g\in N_H(\Delta)$，并由引理5.3.1，$\|g(z)\|<1$. 显然，$g(0)=0$. 令

$$C=(T-B)(I-B^*T)^{-1}. \qquad (5.3.16)$$

由引理5.3.1，$\|C\|<1$. 利用(5.3.14)，(5.3.15)易证 C 分别与 $f(B)$，$f(B)^*$ 以及 F 可交换. 因此，由(5.3.13)知，C 与 g 可交换. 于是，由推论5.3.1，我们有

$$C^*C\geqslant g(C)^*g(C), \qquad (5.3.17)$$

$$CC^*\geqslant g(C)g(C)^*, \qquad (5.3.18)$$

$$\|C\|\geqslant\|g(C)\|. \qquad (5.3.19)$$

下面我们证明(5.3.17)—(5.3.19)正是(5.3.9)—(5.3.11). 事实上，

$$\begin{aligned}\mu_B(C)&=(C+B)(I+B^*C)^{-1}\\&=\{(T+B)(I-B^*T)^{-1}+B\}\{I+B^*(T+B)\\&\quad\cdot(I-B^*T)^{-1}\}^{-1}\\&=\{T-B+B(I-B^*T)\}\{I-B^*T+B^*(T-B)\}^{-1}\\&=T.\end{aligned}$$

因此，

$$F(C)=f(\mu_B(C))=f(T).$$

从而

$$\|F(C)\|=\|f(T)\|<1.$$

于是，由性质5.1.2，

$$\begin{aligned}g(C)&=\{F(C)-f(B)\}\{I-f(B)^*F(C)\}^{-1}\\&=\{f(T)-f(B)\}\{I-f(B)^*f(T)\}^{-1}.\end{aligned}\tag{5.3.20}$$

故由(5.3.16)，(5.3.20)以及(5.3.17)——(5.3.19)，我们得到(5.3.9)——(5.3.11)，从而定理获证. ∎

下面的推论5.3.2[114]是定理3.2.3(算子解析函数的 Pick 定理)的一般化，并且此推论本身在复值解析函数理论中也具有重要意义.

推论5.3.2 设 H 是复 Hilbert 空间. 假设 f 是 Δ 上的复值解析函数，$|f(z)|<1(z\in\Delta)$ 以及 $T\in B(H)$ 是真压缩算子. 如果 B 是正常真压缩算子且与 T 可交换，则(5.3.9)，(5.3.10)和(5.3.11)成立.

利用引理3.3.3和下面引理5.3.2，我们可以证明解析算子函数的 Julia 引理[117].

引理5.3.2 设 H 是复 Hilbert 空间. 假设 $A,B\in B(H)$ 且 $\|AB^{-1}\|<1$. 如果 $N\in B(H)$ 是正常真压缩算子且与 A,B 可交换，$0<\rho<1$，则不等式

$$\|(A-NB)(B-N^*A)^{-1}\|<\rho\tag{5.3.21}$$

等价于

$$(B^*-A^*N)(B-N^*A)^{-1}$$

$$< (1-\rho^2)^{-1}(I-N^*N)(B^*B-A^*A). \qquad (5.3.22)$$

证明 由于$\|N^*AB^{-1}\|<1$，则$I-N^*AB^{-1}$可逆，从而$B-N^*A=(I-N^*AB^{-1})B$亦可逆. 由引理3.3.1，不等式(5.3.21)等价于

$$(A^*-B^*N^*)(A-NB)<\rho^2(B^*-A^*N)(B-N^*A).$$

上式亦可写为

$$\begin{aligned}&(1-\rho^2)(B^*-A^*N)(B-N^*A)\\&\quad<(B^*-A^*N)(B-N^*A)-(A^*-B^*N^*)(A-NB)\\&\quad=B^*B-A^*A+A^*NN^*A-B^*N^*NB. \qquad (5.3.23)\end{aligned}$$

由 Fuglede-Putnam 定理[105]知 N 与 A,B 可交换意味着 $AN^*=N^*A, BN^*=N^*B$. 故

$$\begin{aligned}&B^*B-A^*A+A^*NN^*A-B^*N^*NB\\&\quad=(I-N^*N)(B^*B-A^*A).\end{aligned}$$

因此，不等式(5.3.23)及不等式(5.3.21)等价于(5.3.22). 引理得证. ∎

定理5.3.3 设 H 是复 Hilbert 空间，以及 $f\in N_H(\Delta)$，且对于$z\in\Delta$，$\|f(z)\|<1$. 假设$\{N_n\}$是 H 上的正常真压缩算子序列，并且

(i) 每个 N_n 与 f 可交换，即对于 $z\in\Delta$，$N_nf(z)=f(z)N_n$；

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}\|I-N_n\|=0$；

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty}\|I-f(N_n)\|=0$；

(iv) $\lim\limits_{n\to\infty}\|aI-\{I-f(N_n)^*f(N_n)\}\{I-N_n^*N_n\}^{-1}\|=0$，其中 a 为某一实数；

(v) $c=\liminf\limits_{n\to\infty}\{\|I-N_n^*N_n\|\|(I-N_n^*N_n)^{-1}\|\}<\infty$.

设 $T\in B(H)$为真压缩算子且与所有 N_n 及 f 均可交换，则我们有

(a) $$\begin{aligned}&\|\{I-f(T)\}\{I-f(T)^*f(T)\}^{-1}\{I-f(T)^*\}\|\\&\quad\leqslant ac\|(I-T)(I-T^*T)^{-1}(I-T^*)\|; \qquad (5.3.24)\end{aligned}$$

(b) 如果对于 $b>0$，

$$(I-T^*)(I-T)<b(I-T^*T),\qquad(5.3.25)$$

则

$$\{I-f(T)^*\}\{I-f(T)\}<abc\{I-f(T)^*f(T)\};\qquad(5.3.26)$$

(c) 如果

$$\|T-(1+b)^{-1}I\|<b(1+b)^{-1},(b>0),\qquad(5.3.27)$$

则

$$\|f(T)-(1+abc)^{-1}I\|<abc(1+abc)^{-1}.\qquad(5.3.28)$$

证明 (a) 由于 N_n 是正常真压缩算子，从而 $I-N_n^*N_n$ 为可逆的正常算子. 因此，

$$\|(I-N_n^*N_n)^{-1}\|^{-1}=1-\|N_n\|^2.$$

令 $m_n=1-\|N_n\|^2,M_n=\|I-N_n^*N\|$. 则

$$0<m_nI\leqslant I-N_n^*N_n\leqslant M_nI\qquad(5.3.29)$$

并且

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{M_n}{m_n}=c.$$

假设 $\eta>c$. 不失一般性，不妨假设对于所有的 n，都有

$$\frac{M_n}{m_n}<\eta\qquad(5.3.30)$$

(因为必要时，可由 $\{N_n\}$ 的子序列代替). 设 b 为一正数使得

$$\|(I-T)(I-T^*T)^{-1}(I-T^*)\|<b.\qquad(5.3.31)$$

由于当 $n\to\infty$ 时，$N_n\to I$，从而，$m_n\to0$. 于是，我们可选取 $0<a_n<1$，使得 $b(1-a_n^2)=m_n$(如果必要的话，可去掉有限个 N_n). 则由(5.3.29)、(5.3.30)得

$$bI\leqslant(1-a_n^2)^{-1}(I-N_n^*N_n)\leqslant\eta bI.\qquad(5.3.32)$$

由定理5.3.1知 $\|f(N_n)\|<1$，从而 $I-f(N_n)^*f(N_n)$ 可逆. 于是，由 N_n 为正常算子且与 f 可交换推知 $I-f(N_n)^*f(N_n)$ 与 $(I-N_n^*N_n)^{-1}$ 可交换[105]. 因此，

$$\{I-f(N_n)^*f(N_n)\}(I-N_n^*N_n)^{-1}$$

为正的可逆算子. 令

$$\varepsilon_n=\|aI-\{I-f(N_n)^*f(N_n)\}(I-N_n^*N_n)^{-1}\|,$$

即

$$\varepsilon_n=\sup\{|(\{I-f(N_n)^*f(N_n)\}(I-N_n^*N_n)^{-1}x,\ x)-a|;\|x\|=1\}.$$

由假设(iv), $\varepsilon_n\to 0(n\to\infty)$, 从而, $a\geqslant 0$. 因此,

$$(a-\varepsilon_n)I\leqslant\{I-f(N_n)^*f(N_n)\}(I-N_n^*N_n)^{-1}\leqslant(a+\varepsilon_n)I. \tag{5.3.33}$$

于是, 由(5.3.32)及(5.3.33), 我们有

$$b(a-\varepsilon_n)I\leqslant(1-a_n^2)^{-1}\{I-f(N_n)^*f(N_n)\}\leqslant\eta b(a+\varepsilon_n)I. \tag{5.3.34}$$

而由引理3.3.3, (5.3.31)等价于

$$(I-T^*)(I-T)<b(I-T^*T).$$

因此, (5.3.31)式意味着存在 $\delta>0$ 使得

$$b(I-T^*T)-(I-T^*N_n)(I-N_n^*T)\geqslant\frac{1}{2}\delta I,$$

或者

$$(I-T^*N_n)(I-N_n^*T)<b(I-T^*T)$$

对所有 n 成立(必要时, 可再去掉有限个 N_n). 再利用(5.3.32)以及 T 与 N_n 可交换性得

$$(I-T^*N_n)(I-N_n^*T)<(1-a_n^2)^{-1}(I-N_n^*N_n)(I-T^*T).$$

于是, 由引理5.3.2, 我们有

$$\|(I-N_n)(I-N_n^*T)^{-1}\|<a_n.$$

另一方面, 由算子解析函数的 Pick 定理(定理3.2.3)可得

$$\|\{f(T)-f(N_n)\}\{I-f(N_n)^*f(T)\}^{-1}\|\leqslant\|(T-N_n)(I-N_n^*T)^{-1}\|.$$

因此,

$$\|\{f(T)-f(N_n)\}\{I-f(N_n)^*f(T)\}^{-1}\|<a_n. \tag{5.3.35}$$

由于 $f(N_n)$ 亦为正常的真压缩算子, $\|f(T)\|<1$, 以及 $f(T)$

$f(N_n)=f(N_n)f(T)$，于是，再由引理5.3.2可知，(5.3.35)等价于

$$\{I-f(T)^*f(N_n)\}\{I-f(N_n)^*f(T)\}$$
$$<(1-a_n^2)^{-1}\{I-f(N_n)^*f(N_n)\}\{I-f(T)^*f(T)\}.$$

并且由(5.3.34)式，上不等式为

$$\{I-f(T)^*f(N_n)\}\{I-f(N_n)^*f(T)\}$$
$$<b\eta(a+\epsilon_n)\{I-f(T)^*f(T)\}.$$

因为当 $n\to\infty$ 时，$f(N_n)\to I$ 且 $\epsilon_n\to 0$，所以，上不等式为

$$\{I-f(T)^*\}\{I-f(T)\}\leqslant\eta ab\{I-f(T)^*f(T)\}.$$

再由引理3.3.3，上不等式等价于

$$\|\{I-f(T)\}\{I-f(T)^*f(T)\}^{-1}\{I-f(T)^*\}\|<ab\eta.$$

于是，由 b,η 为满足条件：

$$\|(I-T)(I-T^*T)^{-1}(I-T^*)\|<b,\eta>c$$

的任意正数，我们有不等式(5.3.24).

(b) 首先，由 $|f(0)|<1$，以及在(5.3.24)式中令 $T=0$，我们有

$$ac\geqslant\|\{I-f(0)\}\{I-f(0)^*f(0)\}^{-1}\{I-f(0)^*\}\|>0. \tag{5.3.36}$$

由于 $c\geqslant 1$，所以 $a>0$. 由引理3.3.3知(5.3.25)等价于(5.3.31). 因此，根据(5.3.24)，我们有不等式

$$\|\{I-f(T)\}\{I-f(T)^*f(T)\}^{-1}\{I-f(T)^*\}\|<abc. \tag{5.3.37}$$

故再由引理3.3.3，我们得不等式(5.3.26).

(c) 事实上，上面的证明过程已证明(5.3.27)式. 因为(5.3.27)等价于(5.3.31)(引理3.3.3)，而由(5.3.31)可得(5.3.37). 因此，再由引理3.3.3，得(5.3.27). 定理证毕. ▌

§ 5.4

解析算子函数基本定理的精确化

在这一节里，我们首先精细化§5.2中的基本定理(定理5.2.1)和§5.3中的Schwarz 引理(定理5.3.1)．然后，给出两个解析算子函数的 Harnack 型不等式(定理4.1.1和4.1.2的推广)．

为了证明定理5.4.1，我们需要如下引理[11]．

引理5.4.1 设 A,B,C 和 $D\in B(H)$是两两可交换的正常算子，并且 $AD-BC\neq 0, 0\notin\sigma(C)$．假设 $T\in B(H)$分别与 A,B,C,D 可交换且 $\sigma(T)\cap\sigma(-DC^{-1})=\varnothing$．则对于$0<r<\|A\|\cdot\|C\|^{-1}$，不等式

$$\|(AT+B)(CT+D)^{-1}\|\leqslant r, \tag{5.4.1}$$

等价于不等式

$$\|T+(A^*B-r^2C^*D)(A^*A-r^2C^*C)^{-1}\|$$
$$\leqslant r\|(AD-BC)(A^*A-r^2C^*C)^{-1}\|. \tag{5.4.2}$$

(5.4.1)与(5.4.2)的等式同时成立或同时不成立．

证明 不等式(5.4.1)成立当且仅当

$$r^2I-(C^*T^*+D^*)^{-1}(A^*T^*+B^*)(AT+B)(CT+D)^{-1}\geqslant 0$$

或者

$$(C^*T^*+D^*)^{-1}[r^2(C^*T^*+D^*)(CT+D)$$
$$-(A^*T^*+B^*)(AT+B)](CT+D)^{-1}\geqslant 0.$$

然而，方括号内的算子可写为

$$(A^*A-r^2C^*C)$$
$$\cdot[r^2E^*E(A^*A-r^2C^*C)^{-2}-(T^*T+FT^*+F^*T+F^*F)]$$

或者

$$(A^*A-r^2C^*C)[r^2E^*E(A^*A-r^2C^*C)^{-2}-(T^*+F^*)(T+F)], \tag{5.4.3}$$

其中 $E=AD-BC$, $F=(A^*B-r^2C^*D)(A^*A-r^2C^*C)^{-1}$. 由于 $0<r<\|A\|\cdot\|C\|^2$，所以 $A^*A-r^2C^*C>0$，从而(5.4.3)式为正的充要条件是：

$$\|T+F\|\leqslant\|r^2E^*E(A^*A-r^2C^*C)^{-2}\|^{\frac{1}{2}}$$
$$=r\|E(A^*A-r^2C^*C)^{-1}\|.$$

故(5.4.1)与(5.4.2)等价. ▌

定理5.4.1[11] 设 $f\in N_H(D)$, $\|f(z)\|<1\ (z\in\Delta)$ 且 $0\notin\sigma(f(0))$. 假设 T 是Hilbert 空间 H 上的真压缩算子，并且对每个 $z\in\Delta$, $Tf(z)=f(z)T$. 则

$$\frac{(1-\|T\|^2)\|f(0)\|-\|I-f(0)^*f(0)\|\cdot\|T\|}{\|I-\|T\|^2f(0)^*f(0)\|}\leqslant\|f(T)\|$$
$$\leqslant\frac{(1-\|T\|^2)\|f(0)\|+\|I-f(0)^*f(0)\|\cdot\|T\|}{1-\|f(0)\|^2\|T\|^2}. \tag{5.4.4}$$

如果 $f(0)=\alpha I$，其中 $\alpha\neq0$为复数，则

$$\frac{|\alpha|-\|T\|}{1-|\alpha|\cdot\|T\|}\leqslant\|f(T)\|\leqslant\frac{|\alpha|+\|T\|}{1+|\alpha|\cdot\|T\|}. \tag{5.4.5}$$

证明 因为 $f\in N_H(\Delta)$, $\|f(z)\|<1\ (z\in\Delta)$ 以及 $\|T\|<1$，所以，由定理5.2.1, $\|f(T)\|<1$. 令

$$g(z)=\{f(z)-f(0)\}\{I-f(0)^*f(z)\}^{-1}.$$

于是，由定理5.3.1(Schwarz 引理)，

$$\|g(T)\|\leqslant\|T\|, \|T\|<1. \tag{5.4.6}$$

取 $A=D=I$, $B=-f(0)$, $C=-f(0)^*$ 且 $r=\|T\|$，利用引理5.4.1，得知：(5.4.6)式等价于

$$\|f(T)-(1-\|T\|^2)f(0)\{I-\|T\|^2f(0)^*f(0)\}^{-1}\|$$
$$\leqslant\|T\|\|\{I-f(0)^*f(0)\}\{I-\|T\|^2f(0)^*f(0)\}^{-1}\|. \tag{5.4.7}$$

利用三角不等式于(5.4.7)式，我们得

$$\|f(T)\|\leqslant(1-\|T\|^2)\|f(0)\{I-\|T\|^2f(0)^*f(0)\}^{-1}\|$$
$$+\|T\|\|\{I-f(0)^*f(0)\}\{I-\|T\|^2f(0)^*f(0)\}^{-1}\|$$
$$\leqslant\{(1-\|T\|^2)\|f(0)\|+\|T\|\|I-f(0)^*f(0)\|\}$$

$$\cdot\|\{I-\|T\|^2f(0)^*f(0)\}^{-1}\|.$$

由于

$$\|\{I-\|T\|^2f(0)^*f(0)\}^{-1}\|=(1-\|T\|^2\|f(0)\|^2)^{-1},$$

于是

$$\|f(T)\|\leqslant\{(1-\|T\|^2)\|f(0)\|+\|T\|\|I-f(0)^*f(0)\|\}$$
$$\cdot(1-\|T\|^2\|f(0)\|^2)^{-1}.$$

因此,(5.4.4)的第二个不等式得证. 再由(5.4.7),我们有

$$\begin{aligned}&\|\{f(T)(I-\|T\|^2f(0)^*f(0))-(1-\|T\|^2)f(0)\}\\&\quad\{I-\|T\|^2f(0)^*f(0)\}^{-1}\|\\&\leqslant\|T\|\|\{I-f(0)^*f(0)\}\{I-\|T\|^2f(0)^*f(0)\}^{-1}\|\\&\leqslant\|T\|\|I-f(0)^*f(0)\|\|\{I-\|T\|^2f(0)^*f(0)\}^{-1}\|.\end{aligned}$$

由此,推得

$$\begin{aligned}&\|f(T)[I-\|T\|^2f(0)^*f(0)]-(1-\|T\|^2)f(0)\|\\&\leqslant\|T\|\|I-f(0)^*f(0)\|.\end{aligned}$$

利用三角不等式,我们得

$$\begin{aligned}&(1-\|T\|^2)\|f(0)\|-\|f(T)[I-\|T\|^2f(0)^*f(0)]\|\\&\leqslant\|T\|\|I-f(0)^*f(0)\|.\end{aligned}$$

因此,由上不等式可得(5.4.4)的第一个不等式.

显然,当 $f(0)=\alpha I$ 时,由(5.4.4)可得(5.4.5). 故定理证毕. ▌

下面的推论5.4.1实际上是定理5.3.1(Schwarz 引理)的精细化.

推论5.4.1 设 $f(z)=Bz^n+\cdots\in N_H(\Delta)$, $\|f(z)\|<1$ $(z\in\Delta)$, $f(0)=0$, 并且 $0\notin\sigma(B)$. 假设 T 是 H 上的真压缩算子使得对每个 $z\in\Delta$, $Tf(z)=f(z)T$. 则

$$\begin{aligned}&\|T^n\|\frac{(1-\|T\|^2)\|B\|-\|T\|\|I-B^*B\|}{\|I-\|T\|^2B^*B\|}\leqslant\|f(T)\|\\&\leqslant\|T^n\|\frac{(1-\|T\|^2)\|B\|+\|T\|\|I-B^*B\|}{1-\|B\|^2\|T\|^2}.\end{aligned}\tag{5.4.8}$$

如果 $B=\alpha I$, 其中 $\alpha\neq0$ 为复数,则

$$\|T^n\|\frac{|\alpha|-\|T\|}{1-|\alpha|\cdot\|T\|}\leqslant\|f(T)\|\leqslant\|T^n\|\frac{|\alpha|+\|T\|}{1+|\alpha|\cdot\|T\|}. \quad (5.4.9)$$

证明 设

$$g(z)=\frac{f(z)}{z^n}, z\in\Delta, z\neq 0,$$

$$g(0)=B.$$

则 $g\in N_H(\Delta)$，$\|g(z)\|<1(z\in\Delta)$，并且 $f(T)=T^n g(T)$. 因此，对于 g 利用5.4.1可得(5.4.8)式. ▮

定理4.1.1和4.1.2给出了关于算子解析函数的几个 Harnack 型不等式. 下面的定理5.4.2、5.4.3[11]则是这两个定理在解析算子函数中的推广. 在证明我们的定理之前，先给出两个有用的引理.

引理5.4.2 设 B 是 Hilbert 空间上的可逆正常算子，$0<r<1$. 假设 T 是 H 上的真压缩算子且 $TB=BT$. 则下面的不等式等价：

(i) $\|T\|\leqslant r$;

(ii) $\left\|(I+T)(I-T)^{-1}-\frac{1+r^2}{1-r^2}I\right\|\leqslant\frac{2r}{1-r^2}$;

(iii) $\left\|(B+BT)(I-T)^{-1}-\frac{1+r^2}{1-r^2}B\right\|\leqslant\frac{2r}{1-r^2}\|B\|$.

证明 (i)与(ii)的等价性即为引理4.1.1. 因此，我们只须证明(ii)与(iii)的等价性. 设

$$A=(I+T)(I-T)^{-1}-\frac{1+r^2}{1-r^2}I, \beta=\frac{2r}{1-r^2}.$$

若(ii)成立，即$\|A\|\leqslant\beta$，那么

$$\|AB\|\leqslant\|A\|\cdot\|B\|\leqslant\beta\|B\|.$$

所以(iii)成立. 反之，若(iii)成立，即$\|AB\|\leqslant\beta\|B\|$，则由 B 的可逆性，可得(ii). ▮

引理5.4.3 设 T 是 Hilbert 空间 H 上的正常算子，B 是 H 上的 Hermite 算子且 $\mathrm{Re}A<B$. 则对于 $z\in\Delta$，函数

$$\varphi(z)=A+2[\mathrm{Re}A-B]\frac{z}{1-z}$$

是Δ内的单叶算子值解析函数(φ在Δ内单叶意味着对任意$\Phi\in B(H)^*$,$\Phi(\varphi(z))$在经典意义下单叶),并且$\mathrm{Re}\varphi(T)<B$等价于$\|T\|<1$.

证明 事实上,我们有$I+2\mathrm{Re}T(I-T)^{-1}>0$当且仅当$\|T\|<1$.因为

$$I+2\mathrm{Re}T(I-T)^{-1}>0$$

等价于

$$(I-T^*)^{-1}T^*+T(I-T)^{-1}>-I,$$

或者

$$(I-T^*)^{-1}[T^*(I-T)+(I-T^*)T](I-T)^{-1}>-I,$$

即

$$T^*+T-2T^*T>-(I-T^*)(I-T).$$

而上不等式可写为

$$T^*T<I, \text{即} \|T\|<1.$$

而

$$\mathrm{Re}\varphi(T)=\mathrm{Re}A+2[\mathrm{Re}A-B]\mathrm{Re}T(I-T)^{-1}.$$

因此,$\mathrm{Re}\varphi(T)<B$当且仅当$\|T\|<1$. ∎

定理5.4.2 设$g\in N_H(\Delta)$使得对所有$z,w\in\Delta$,$\mathrm{Re}g(z)>0$,$\mathrm{Re}(g(z)g(0)^*)>0$,并且$g'(0)=\cdots=g^{(n-1)}(0)=0(n\geqslant 2)$.如果$T$是$H$上的真压缩算子且对于$z\in\Delta$,$Tg(z)=g(z)T$,则

$$\left\|g(T)-\frac{1+\|T^n\|^2}{1-\|T^n\|^2}g(0)\right\|\leqslant\frac{2\|T^n\|}{1-\|T^n\|^2}\|g(0)\|. \quad (5.4.10)$$

如果$g(0)=g(0)^*$且$0\notin\sigma(g(0))$,则

$$\frac{1-\|T^n\|}{1+\|T^n\|}\|g(0)^{-1}\|^{-1}I\leqslant\mathrm{Re}(g(T))$$

$$\leqslant\frac{1+\|T^n\|}{1-\|T^n\|}\|g(0)\|I. \quad (5.4.11)$$

特别地,若$g(0)=I$,则

$$\left\|g(T)-\frac{1+\|T^n\|^2}{1-\|T^n\|^2}I\right\|\leqslant\frac{2\|T^n\|}{1-\|T^n\|^2};\qquad(5.4.12)$$

$$\frac{1-\|T^n\|}{1+\|T^n\|}I\leqslant\mathrm{Re}g(T)\leqslant\frac{1+\|T^n\|}{1-\|T^n\|}I;\qquad(5.4.13)$$

$$-\frac{2\|T^n\|}{1-\|T^n\|^2}I\leqslant\mathrm{Im}g(T)\leqslant\frac{2\|T^n\|}{1-\|T^n\|^2}I.\qquad(5.4.14)$$

证明 定义

$$f(z)=[g(z)-g(0)][g(z)+g(0)]^{-1}.\qquad(5.4.15)$$

则 $f\in N_H(\Delta)$，并且 $f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(n-1)}(0)=0$，以及对 $z\in\Delta$，$\|f(z)\|<1$. 事实上，由 g 的假设条件，$f\in N_H(\Delta)$，$f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(n-1)}(0)=0$是显然的. 而$\|f(z)\|<1$等价于

$$[g(z)^*+g(0)^*]^{-1}[g(z)^*-g(0)^*]$$
$$[g(z)-g(0)][g(z)+g(0)]^{-1}<I,$$

亦可写为

$$2[g(z)^*g(0)+g(z)g(0)^*]>0,$$

即

$$4\mathrm{Re}[g(z)g(0)^*]>0,$$

亦即

$$\mathrm{Re}[g(z)g(0)^*]>0.$$

由推论5.3.1(Schwarz 引理)，我们得

$$\|f(T)\|\leqslant\|T^n\|.$$

于是，取 $r=\|T^n\|$，$B=g(0)$，由引理4.4.2可得

$$\left\|[g(0)+g(0)f(T)](I-f(T))^{-1}-\frac{1+\|T^n\|^2}{1-\|T^n\|^2}g(0)\right\|$$
$$\leqslant\frac{2\|T^n\|}{1-\|T^n\|^2}\|g(0)\|.$$

而由(5.4.15)式得

$$g(z)=[g(0)+g(0)f(z)][I-f(z)]^{-1},$$

即

$$g(T)=[g(0)+g(0)f(T)][I-f(T)]^{-1}.$$

从而(5.4.10)式成立.

根据(5.4.10),我们可得

$$\operatorname{Re}\left[g(T)-\frac{1+\|T^n\|^2}{1-\|T^n\|^2}g(0)\right]\leqslant\left\|g(T)-\frac{1+\|T^n\|^2}{1-\|T^n\|^2}g(0)\right\|\cdot I$$

$$\leqslant\frac{2\|T^n\|}{1-\|T^n\|^2}\|g(0)\|\cdot I.$$

因此,我们有

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}g(T)&\leqslant\frac{(1+\|T^n\|^2)\operatorname{Re}g(0)+2\|T^n\|\cdot\|g(0)\|\cdot I}{1-\|T^n\|^2}\\&\leqslant\frac{1+\|T^n\|}{1-\|T^n\|}\|g(0)\|\cdot I.\end{aligned}$$

所以,(5.4.11)式的第二个不等式成立.下面我们证明(5.4.11)式的第一个不等式成立.因为 $g(0)=g(0)^*$ 且$0\notin\sigma(g(0))$,于是,我们有

$$\operatorname{Re}(g(T)g(0)^{-1})\leqslant\operatorname{Re}g(T)\|g(0)^{-1}\|. \tag{5.4.16}$$

事实上,(5.4.16)成立当且仅当

$$\frac{g(T)g(0)^{-1}+g(T)^*g(0)^{*-1}}{2}\leqslant\frac{g(T)+g(T)^*}{2}\|g(0)^{-1}\|,$$

或者

$$\begin{aligned}&g(T)[\|g(0)^{-1}\|\cdot I-g(0)^{-1}]\\&+g(T)^*[\|g(0)^{-1}\|\cdot I-g(0)^{*-1}]\geqslant0,\end{aligned}$$

即

$$[\operatorname{Re}g(T)][\|g(0)^{-1}\|\cdot I-g(0)^{-1}]\geqslant0.$$

显然,由 $\operatorname{Re}g(T)\geqslant0$且$\|g(0)^{-1}\|\cdot I-g(0)^{-1}\geqslant0$知上不等式成立.所以(5.4.16)式成立.根据(5.4.10)式,我们有

$$\left\|g(T)g(0)^{-1}-\frac{1+\|T^n\|^2}{1-\|T^n\|^2}I\right\|\leqslant\frac{2\|T^n\|}{1-\|T^n\|^2}.$$

从而

$$-\operatorname{Re}\left[g(T)g(0)^{-1}-\frac{1+\|T^n\|^2}{1-\|T^n\|^2}I\right]\leqslant\frac{2\|T^n\|}{1-\|T^n\|^2}I,$$

即

$$\mathrm{Re}[g(T)g(0)^{-1}]\geqslant\frac{1-\|T^n\|}{1+\|T^n\|}I. \qquad (5.4.17)$$

于是，由(5.4.16)，(5.4.17)，我们得

$$\mathrm{Re}g(T)\geqslant\mathrm{Re}[g(T)g(0)^{-1}]\cdot\|g(0)^{-1}\|^{-1}$$
$$\geqslant\frac{1-\|T^n\|}{1+\|T^n\|}\|g(0)^{-1}\|^{-1}I.$$

因此，(5.4.11)式的第一个不等式成立.

(5.4.12)—(5.4.14)显然成立. 故定理获证. ▌

定理5.4.3 设 B 是 Hilbert 空间 H 上的 Hermite 算子，$f\in N_H(D)$，其中 $D=\{z;|z|<r\}$，并且

$$\mathrm{Re}f(z)<B, z\in D.$$

如果 $T\in B(H)$ 使得 $\|T\|<r$ 且对于 $z\in\Delta$，$Tf(z)=f(z)T$，则我们有

$$\mathrm{Re}f(T)\leqslant\left\{\frac{r-\|T\|}{r+\|T\|}\mathrm{Re}f(0)+\frac{2\|T\|}{r+\|T\|}B\right\}. \qquad (5.4.18)$$

(5.4.18)式的等式成立当且仅当 $T=0$；或者 T 与 f 具有如下形式：

$$T=-\bar{\eta}\alpha I,$$
$$f(z)=\{rT_0+(T_0-2B)\eta z\}(r-\eta z)^{-1},$$

其中 $|\eta|=1$，$0<\alpha<r$，且 $\mathrm{Re}T_0<B$.

证明 定义开单位圆盘 Δ 内的算子值函数

$$\varphi(z)=f(0)+2[\mathrm{Re}f(0)-B]\frac{z}{1-z}, z\in\Delta.$$

则由引理5.4.3，φ 在 Δ 内单叶解析. 定义 Δ 内的函数：

$$g(z)=\varphi^{-1}\circ f(rz), z\in\Delta, \qquad (5.4.19)$$

其中 φ^{-1} 是 φ 的反函数. 则 $g\in A_H(\Delta)$ 并且对 $z\in\Delta$，$\|g(z)\|<1$ 且 $g(0)=0$. 事实上，$g\in A_H(\Delta)$ 是显然的. 另外，由(5.4.19)，我们有 $\varphi\circ g(z)=f(rz)$，从而 $\varphi(g(0))=f(0)$，即 $g(0)=0$；并且

$$\mathrm{Re}(\varphi\circ g(z))=\mathrm{Re}(f(rz))<B, |z|<1.$$

从而，由引理5.4.3，我们得 $\|g(z)\|<1$ $(z\in\Delta)$. 于是，由定理

4.3.1,对于$\|A\|<1$,$\|g(A)\|\leqslant\|A\|$,
因此,

$$\|\varphi^{-1}\circ f(rA)\|\leqslant\|A\|,\|A\|<1,$$

或者

$$\|\varphi^{-1}\circ f(T)\|\leqslant\frac{\|T\|}{r},\|T\|<r. \tag{5.4.20}$$

由引理4.1.2,对于所有$\|C\|<1$,我们有

$$\mathrm{Re}[C(I-C)^{-1}]\geqslant-\frac{\|C\|}{1+\|C\|}I.$$

因此,

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\varphi(C)&=\mathrm{Re}f(0)+2[\mathrm{Re}f(0)-B]\cdot\mathrm{Re}[C(I-C)^{-1}]\\&\leqslant\mathrm{Re}f(0)-2[\mathrm{Re}f(0)-B]\cdot\frac{\|C\|}{1+\|C\|},\|C\|<1.\end{aligned} \tag{5.4.21}$$

取$C=\varphi^{-1}\circ f(T)$,其中$\|T\|<r$,则由(5.4.20),得$\|C\|\leqslant\frac{\|T\|}{r}$.由此得

$$\frac{\|C\|}{1+\|C\|}\leqslant\frac{\|T\|}{r+\|T\|}. \tag{5.4.22}$$

故由$\varphi(C)=f(T)$以及(5.4.21),(5.4.22)得(5.4.18).

(5.4.18)式的等式情形的证明类似定理4.1.2中(4.1.8)式的等式证明.从而,定理5.4.3获证. ∎

§5.5

解析算子函数的均值

Miroslov 在[88]中给出了关于单位圆上调和共轭函数的均值定理.在此,我们将这一结果推广到解析算子函数的情形[19].

设$F\in A_H(\Delta)$,并且

$$F(z)=U(z)+iV(z),z\in\Delta, \tag{5.5.1}$$

其中$U(z)$与$V(z)$分别为$F(z)$的实部和虚部，则$U(z)$，$V(z)$为算子值调和函数，即对任意$\Phi\in B(H)^*$，$\Phi(U(z))$，$\Phi(V(z))$在经典意义下均为调和函数．对于任意给定的$z\in\Delta$，$0<p<1$，令$r=|z|$且$D=\{\xi;|\xi-z|\leqslant R-r\}$，其中$R=p+(1-p)r$．则

$$0<r<R<1 \text{ 且 } D\subseteq\{\xi;|\xi|\leqslant R\}\subseteq\Delta.$$

因为

$F(z)=m(D)^{-1}\iint\limits_D F(\xi)dm(\xi)$，其中$F\in A_H(\Delta)$，$D\subseteq\Delta$且$dm$为复平面上的Lebesgue测度，所以

$$U(z)=m(D)^{-1}\iint\limits_D U(\xi)dm(\xi), \tag{5.5.2}$$

其中$U(z)$为$F(z)$的实部．

在这一节，c_p在不同情形下表示不同的常数．

引理 5.5.1 设算子值函数$U(z)$在Δ内调和，并且$0<p<1$．则存在仅依赖于p的常数$c_p>0$使得

$$\|U(z)\|^p\leqslant c_p(1-|z|)^{-2}\iint\limits_\Delta\|U(\xi)\|^p dm(\xi), z\in\Delta, \tag{5.5.3}$$

其中dm为复平面上的Lebesgue测度．

证明 不失一般性，我们可以假设

$$\frac{1}{\pi}\iint\limits_\Delta\|U(\xi)\|^p dm(\xi)=1.$$

任给$z_0\in\Delta$，$r_0=|z_0|$．对任意$z\in\Delta$，令$r=|z|$且

$$D=\{\xi;|\xi-z|\leqslant R-r\}, R=p+(1-p)r.$$

则$0<r<R<1$且$D\subseteq\{\xi;|\xi|\leqslant R\}\subseteq\Delta$．于是，由(5.5.2)，

$$\begin{aligned}\|U(z)\|&\leqslant m(D)^{-1}M(R)^{1-p}\iint\limits_D\|U(\xi)\|^p dm(\xi)\\&\leqslant\pi^{-1}p^{-2}(1-r)^{-2}M(R)^{1-p}\iint\limits_D\|U(\xi)\|^p dm(\xi)\end{aligned}$$

$$\leqslant \pi^{-1}p^{-2}(1-r)^{-2}M(R)^{1-p}\iint_{\Delta}\|U(\xi)\|^{p}dm(\xi)$$
$$=p^{-2}(1-r)^{-2}M(R)^{1-p},$$

其中 $M(R)=\sup\{\|U(\xi)\|;|\xi|\leqslant R\}$. 因此,

$$M(r)=\sup\{\|U(\xi)\|;|\xi|\leqslant r\}\leqslant p^{-2}(1-r)^{-2}M(R)^{1-p} \tag{5.5.4}$$

对不等式(5.5.4)两边同时取对数,再关于 r 求积分得

$$\int_{r_0}^{1}\log M(r)dr\leqslant -2(1-r_0)\log\frac{p(1-r_0)}{e}$$
$$-(1-p)\int_{r_0}^{1}\log M(p+(1-p)r)dr$$
$$\leqslant -2(1-r_0)\log\frac{p(1-r_0)}{e}+\int_{p+(1-p)r_0}^{1}\log M(r)dr.$$

由于 $r_0<p+(1-p)r_0$, 于是,我们得

$$\int_{r_0}^{p+(1-p)r_0}\log M(r)dr\leqslant -2(1-r_0)\log\frac{p(1-r_0)}{e}. \tag{5.5.5}$$

因为 $M(r)$ 关于 r 为增加,所以,由(5.5.5)式得

$$p(1-r_0)\log M(r_0)\leqslant -2(1-r_0)\log\frac{p(1-r_0)}{e},$$

即

$$M(r_0)^{p}\leqslant\left(\frac{e}{p(1-r_0)}\right)^{2}=\frac{e^2}{p^2\pi}(1-r_0)^{-2}\iint_{\Delta}\|U(\xi)\|^{p}dm(\xi).$$

令 $c_p=\frac{e^2}{p^2\pi}$, 并注意 $z_0\in\Delta$ 的任意性. 我们有

$$\|U(z)\|^{p}\leqslant c_p(1-|z|)^{-2}\iint_{\Delta}\|U(\xi)\|^{p}dm(\xi),z\in\Delta. \blacksquare$$

引理 5.5.2 设 A 为 Hilbert 空间 H 上的真压缩算子, $0<t<1$. 则

$$\|I-tA\|^{-1}\leqslant 2\|I-A\|^{-1}. \tag{5.5.6}$$

证明 因为

$$\left|\frac{1-z}{1-tz}\right|=\left|1+\sum_{n=1}^{\infty}(t^{n}-t^{n-1})z^{n}\right|$$

$$\leqslant 1+\sum_{n=1}^{\infty}(t^{n-1}-t^{n})=2.$$

所以

$$\|(I-A)(I-tA)^{-1}\|\leqslant 2.$$

于是

$$\begin{aligned}\|I-A\| &\leqslant \|(I-A)(I-tA)^{-1}\|\cdot\|I-tA\|\\ &\leqslant 2\|I-tA\|.\end{aligned}$$

故(5.5.6)式成立. ▌

引理 5.5.3 设 A 为 H 上的真压缩算子,$0<p<1$. 则存在仅依赖于 p 的正常数 $c_p<+\infty$ 使得

$$\begin{aligned}&\int_0^1(1-\rho)^{p-1}\|I-\rho A\|^{-p-2}d\rho\\ &\leqslant c_p\|I-A\|^{-2}.\end{aligned}\tag{5.5.7}$$

证明 (i)当 $\|I-A\|\geqslant 1$ 时,则由引理 5.5.2, $\|I-\rho A\|^{-1}\leqslant 2$. 于是,

$$\begin{aligned}\int_0^1(1-\rho)^{p-1}\|I-\rho A\|^{-p-2}d\rho &\leqslant 2^{p+2}\int_0^1(1-\rho)^{p-1}d\rho\\ &=p^{-1}\cdot 2^{p+2}.\end{aligned}$$

又因为 $\|I-A\|\leqslant 2$,所以 $4\|I-A\|^{-2}\geqslant 1$. 故(5.5.7)式成立.

(ii) 当 $\|I-A\|<1$ 时,令 $r=1-\|I-A\|$. 于是

$$1-\rho r\leqslant\|I-\rho A\|+2\rho\|I-\rho A\|\leqslant 3\|I-\rho A\|,$$

即

$$\|I-\rho A\|^{-1}\leqslant 3(1-\rho r)^{-1}.$$

则

$$\begin{aligned}&\int_0^1(1-\rho)^{p-1}\|I-\rho A\|^{-p-2}d\rho\\ &\leqslant 3^{p+2}\int_0^1(1-\rho)^{p-1}(1-\rho r)^{-p-2}d\rho\\ &\leqslant 3^{p+2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{p}\right)(1-r)^{-2}\\ &=3^{p+2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{p}\right)\|I-A\|^{-2}.\end{aligned}$$

从而(5.5.7)式成立．故综合(i)与(ii)，引理 5.5.3 证毕． ▌

引理 5.5.4 设 A 是 H 上的正常真压缩算子．如果 $F(z)=U(z)+iV(z)\in A_H(\Delta)$ 且 $0<p<1$，则

$$\sup_{0<t<1}\|F'(tA)\|\leqslant c_p(1-\|A\|)^{-p}$$

$$\sup_{0<t<1}\iint_{\Delta}\|U[(At-\xi I)(I-\xi A^*t)^{-1}]\|^p dm(\xi), \quad (5.5.8)$$

其中 c_p 为仅依赖于 p 的正常数，并且 dm 是复平面上的 Lebesgue 测度．

证明 由引理 5.5.1，我们有

$$M(\frac{1}{2})^p\leqslant c_p\iint_{\Delta}\|U(\xi)\|^p dm(\xi), \quad (5.5.9)$$

其中 $M\left(\frac{1}{2}\right)=\sup\left\{\|U(\xi)\|;|\xi|\leqslant\frac{1}{2}\right\}$ 且 c_p 为仅依赖于 p 的正常数．由算子值函数的 Cauchy 公式及定理[114]：

$$2\pi rF'(0)=\int_{-\pi}^{\pi}U(re^{i\theta})e^{-i\theta}d\theta, 0<r<1, \quad (5.5.10)$$

其中 $U(z)$ 为 $F(z)\in A_H(\Delta)$ 的实部．于是，利用(5.5.9)，(5.5.10)可得不等式：

$$\|F'(0)\|^p\leqslant c_pM(\frac{1}{2})^p\leqslant c_p\iint_{\Delta}\|U(\xi)\|^p dm(\xi). \quad (5.5.11)$$

令 $\varphi(\zeta)=(A-\zeta I)(I-\zeta A^*)^{-1}$. 则 $\varphi(0)=A$，$\|\varphi(\zeta)\|<1$，以及 $A-\varphi(\zeta)=\zeta(I-\varphi(\zeta)A^*)$，$(\zeta\in\Delta)$. 设 $H(\zeta)=F\circ\varphi(\zeta)$. 则 $H(\zeta)\in A_H(\Delta)$. 于是，由(5.5.11)，我们有

$$\|H'(0)\|^p\leqslant c_p\iint_{\Delta}\|\mathrm{Re}H(\zeta)\|^p dm(\zeta)$$
$$\leqslant c_p\iint_{\Delta}\|U(\varphi(\zeta))\|^p dm(\zeta). \quad (5.5.12)$$

另一方面，我们有

$$H'(0)=\lim_{\zeta\to 0}\frac{H(\zeta)-H(0)}{\zeta-0}$$

$$=\lim_{\zeta\to 0}\frac{F(\varphi(\zeta))-F(A)}{\zeta}$$

$$=\lim_{\zeta\to 0}\frac{1}{2\pi i}\zeta^{-1}\int_{\Gamma}F(\xi)[(\xi I-\varphi(\zeta))^{-1}-(\xi I-A)^{-1}]d\xi$$

$$=\lim_{\zeta\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}F(\xi)[\xi I-\varphi(\zeta)]^{-1}(\xi I-A)^{-1}(\varphi(\zeta)-A)\zeta^{-1}d\xi$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\lim_{\zeta\to 0}\int_{\Gamma}F(\xi)[\xi I-\varphi(\zeta)]^{-1}(\xi I-A)^{-1}(I-A^{*}\varphi(\zeta))d\xi$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}F(\xi)(\xi I-A)^{-2}(I-A^{*}A)d\xi$$

$$=-F'(A)(I-A^{*}A),$$

其中Γ为Δ内任一使其$\sigma(\varphi(\zeta))$包含在Γ的内域中的正定向简单可求长闭曲线．所以

$$H'(0)=-F'(A)(I-A^{*}A). \tag{5.5.13}$$

应用(5.5.12)及(5.5.13)得

$$\begin{aligned}&\|F'(A)\|^{p}\\&\quad=\|F'(A)(I-A^{*}A)(I-A^{*}A)^{-1}\|\\&\quad=\|H'(0)(I-A^{*}A)^{-1}\|\\&\quad\leqslant c_{p}\|(I-A^{*}A)^{-1}\|\\&\qquad\cdot\iint_{\Delta}\|U[(A-\zeta I)(I-\zeta A^{*})^{-1}]\|^{p}dm(\zeta),\end{aligned}$$

并且

$$(1-\|A\|^{2})^{-1}=\|(I-A^{*}A)^{-1}\|,\ \|A\|<1.$$

从而，我们有

$$\begin{aligned}&\|F'(A)\|^{p}\\&\quad\leqslant c_{p}(1-\|A\|^{2})^{-p}\iint_{\Delta}\|U[(A-\zeta I)(I-\zeta A^{*})^{-1}]\|^{p}dm(\zeta).\end{aligned} \tag{5.5.14}$$

由引理5.5.2，对于$0<t<1$，我们有

$$\begin{aligned}(1-\|tA\|^{2})^{-p}&=[(1+t\|A\|)(1-t\|A\|)]^{-p}\\&\leqslant(1-t\|A\|)^{-p}\end{aligned}$$

$$\leqslant 2^{p}(1-\|A\|)^{-p}. \tag{5.5.15}$$

因此，由(5.5.14)及(5.5.15)，我们可得

$$\|F'(tA)\|^{p}$$
$$\leqslant c_{p}(1-t^{2}\|A\|^{2})^{-p}\iint_{\Delta}\|U[(At-\zeta I)(I-\zeta A^{*}t)^{-1}]\|^{p}dm(\zeta)$$
$$\leqslant c_{p}(1-\|A\|)^{-p}\iint_{\Delta}\|U[(At-\zeta I)(I-\zeta A^{*}t)^{-1}]\|^{p}dm(\zeta).$$

在不等式两边同时取"sup"得(5.5.8)式. ∎

引理 5.5.5 设 A 为 H 上的正常真压缩算子. 如果 $F(z)=U(z)+iV(z)\in A_{H}(\Delta)$，则对于 $0<p<1$，存在仅依赖于 p 的正常数 $c_{p}<+\infty$ 使得

$$\|F(A)\|^{p}\leqslant\|F(0)\|^{p}+c_{p}\int_{0}^{1}(1-\rho)^{p-1}G(\rho A)^{p}d\rho, \tag{5.5.16}$$

其中 $G(A)=\sup\limits_{0<t<1}\|F'(tA)\|$.

证明 因为 $F(z)\in A_{H}(\Delta)$，并且

$$F(z)=F(0)+z\int_{0}^{1}F'(\rho z)d\rho,$$

所以

$$F(A)=F(0)+A\int_{0}^{1}F'(\rho A)d\rho.$$

从而

$$\|F(A)\|^{p}\leqslant\|F(0)\|^{p}+\left(\int_{0}^{1}\|AF'(\rho A)\|d\rho\right)^{p}$$
$$\leqslant\|F(0)\|^{p}+\left(\int_{0}^{1}G(\rho A)d\rho\right)^{p}. \tag{5.5.17}$$

设 $h(\rho)=G(\rho A)$，$0<\rho<1$. 则

$$\left\{\int_{0}^{1}h(\rho)d\rho\right\}^{p}\leqslant c\int_{0}^{1}(1-\rho)^{p-1}h(\rho)^{p}d\rho, \tag{5.5.18}$$

其中 c 为正常数. 事实上，我们不妨设

$$\int_{0}^{1}(1-\rho)^{p-1}h(\rho)^{p}d\rho\leqslant 1.$$

由于 $h(\rho)$ 为不减函数，则有

$$h(r)^p \int_r^1 (1-\rho)^{p-1} d\rho \leqslant 1,$$

从而

$$h(r)^p \leqslant \frac{p}{(1-r)^p} \leqslant (1-r)^{-1}.$$

于是

$$\int_0^1 h(\rho) d\rho = \int_0^1 h(\rho)^{1-p} h(\rho)^p d\rho$$
$$\leqslant \int_0^1 (1-\rho)^{p-1} h(\rho)^p d\rho.$$

因此，

$$\left\{ \int_0^1 h(\rho) d\rho \right\}^p \leqslant \left\{ \int_0^1 (1-\rho)^{p-1} h(\rho)^p d\rho \right\}^p$$
$$= \left\{ \int_0^1 (1-\rho)^{p-1} h(\rho) d\rho \right\}^{p-1}$$
$$\left\{ \int_0^1 (1-\rho)^{p-1} h(\rho)^p d\rho \right\}$$
$$\leqslant c_p \int_0^1 (1-\rho)^{p-1} h(\rho)^p d\rho,$$

即不等式(5.5.18)成立．故由(5.5.17)及(5.5.18)式得(5.5.16)式． ∎

有了上面的几个引理，我们就可以证明定理 5.5.1[19]．

定理 5.5.1 设 A 为 Hilbert 空间 H 上的正常真压缩算子．如果 $F(z)=U(z)+iV(z)\in A_H(\Delta)$，则对于 $0<p<1$，存在仅依赖于 p 的正常数 $c_p<+\infty$ 使得

$$\|F(A)\|^p \leqslant \|F(0)\|^p + c_p(1-\|A\|)^{-2}.$$
$$\cdot \sup_{0<t<1} \iint_\Delta \|U[(At-\zeta I)(I-\zeta A^* t)^{-1}]\|^p dm(\zeta), \quad (5.5.19)$$

其中 dm 是复平面上的 Lebesgue 测度．

证明 由引理 5.5.4，我们有

$$G(A)^p = \sup_{0<t<1} \|F'(tA)\|^p$$
$$\leqslant c_p(1-\|A\|)^{-p}$$

$$\sup_{0<t<1}\iint_{\Delta}\|U[(At-\zeta I)(I-\zeta A^{*}t)^{-1}]\|^{p}dm(\zeta).$$

于是

$$\begin{aligned}G(\rho A)^{p}&\leqslant c_{p}(1-\|\rho A\|)^{-p}\\&\quad\sup_{0<t<1}\iint_{\Delta}\|U[(At\rho-\zeta I)(I-\zeta A^{*}t\rho)^{-1}]\|^{p}dm(\zeta)\\&\leqslant c_{p}\|(I-\rho\|A\|I)\|^{-p}\\&\quad\sup_{\substack{0<t<1\\0<\rho<1}}\iint_{\Delta}\|U[(At\rho-\zeta I)(I-\zeta A^{*}t\rho)^{-1}]\|^{p}dm(\zeta)\\&=c_{p}\|I-\rho A_{1}\|^{-p}\\&\quad\sup_{0<t<1}\iint_{\Delta}\|U[(At-\zeta I)(I-\zeta A^{*}t)^{-1}]\|^{p}dm(\zeta),\end{aligned}\tag{5.5.20}$$

其中 $A_{1}=\|A\|\cdot I$，且 $\|A_{1}\|=\|A\|<1$. 应用引理 5.5.5，5.5.3 以及不等式(5.5.20)，并且记

$$s_{1}=\sup_{0<t<1}\iint_{\Delta}\|U[(At-\zeta I)(I-\zeta A^{*}t)^{-1}]\|^{p}dm(\zeta),$$

我们有

$$\begin{aligned}&\|F(A)\|^{p}\\&\leqslant\|F(0)\|^{p}+c_{p}\int_{0}^{1}(1-\rho)^{p-1}G(\rho A)^{p}d\rho\\&\leqslant\|F(0)\|^{p}+c_{p}\int_{0}^{1}(1-\rho)^{p-1}\|I-\rho A_{1}\|^{-p}d\rho\cdot s_{1}\\&=\|F(0)\|^{p}\\&\quad+c_{p}\int_{0}^{1}(1-\rho)^{p-1}\|I-\rho A_{1}\|^{-p-2}\|I-\rho A_{1}\|^{2}d\rho\cdot s_{1}\\&\leqslant\|F(0)\|^{p}+c_{p}\int_{0}^{1}(1-\rho)^{p-1}\|I-\rho A_{1}\|^{-p-2}d\rho\cdot s_{1}\\&\leqslant\|F(0)\|^{p}+c_{p}\|I-A_{1}\|^{-2}\cdot s_{1}.\end{aligned}$$

因此，由 $\|I-A_{1}\|=1-\|A\|$ 得不等式(5.5.19). 定理证毕. ▌

§5.6

解析算子函数的端点性质

在[41]中,Doob 首先给出了如下一类解析函数 $D(\rho)$:

设 $f\in H(\Delta)$,并且对于任意固定的 $0<\rho\leqslant 2\pi$,$f(z)$ 满足条件:

(i) $f(0)=0$;

(ii) $\varliminf\limits_{z\to p}|f(z)|\geqslant 1$;

其中 p 为 Δ 的边界 $\partial\Delta$ 上的某一段弧 γ 上的任意一点且弧长 $|\gamma|\geqslant\rho$. 称此函数族 $D(\rho)$ 为 Doob 族. Doob 在[41]中也引入了下面的一个量:

$$\|f\|_D=\sup_{z\in\Delta}|f'(z)|(1-|z|), \tag{5.6.1}$$

并称 $\|f\|_D$ 为 Doob 范数. 我们说函数 $f\in H(\Delta)$ 满足性质 $K(\rho)$[41],如果 $f(0)=0$,并且对于弧 $\gamma\subseteq\partial\Delta$, $|\gamma|\geqslant 2\rho>0$,

$$\varliminf_{j\to\infty}|f(z_j)|\geqslant 1,$$

其中 $\{z_j\}$ 是 Δ 内任一收敛到 γ 的内点之点列.

Hwang 在[74—78]中,解决了 Doob 提出的一个长期未决的"open"问题[41],并证明了下面的定理 A 和定理 B.

定理 A 不存在具有 $K(\rho)$ 性质的函数 f 满足

$$(1-|z|)|f'(z)|\leqslant\frac{1}{n}, |z|<1,$$

其中 $n>N(\rho)=\log\dfrac{1}{1-\cos\rho}$, $0<\rho<\rho_0<\dfrac{\pi}{2}$.

随后,他又将上面的结果推广到算子的情形[77]:

定理 B 不存在具有 $K(\rho)$ 性质的函数 f 满足

$$(1-\|A\|)\|f'(A)\|\leqslant\frac{1}{n},$$

其中 A 为 Hilbert 空间 H 上的真压缩算子，并且 $n>N(\rho)=\log\frac{1}{1-\cos\rho}$，$0<\rho<\rho_0<\frac{\pi}{2}$.

在这一节里，我们将证明关于解析算子函数也有类似定理 A 和定理 B 的结果．为此，我们先给出一个定义和几个引理[9].

定义 5.6.1 设 $f\in A_H(\Delta)$. 我们称 f 具有 $K_T(\rho)$ 性质，如果

(i) $f(0)=0$，

(ii) 对于 $\partial\Delta$ 上的弧 γ，$|\gamma|\geqslant 2\rho>0$，有

$$\varliminf_{j\to\infty}\|f(z_j)\|\geqslant 1, \tag{5.6.2}$$

其中 $\{z_j\}$ 是 Δ 内任一收敛于 γ 的内点之点列．

根据定义 5.6.1，对于任意固定的 $0<\rho\leqslant 2\pi$，$D_T(\rho)$ 表示 Δ 上具有 $K_T(\rho)$ 性质的所有算子值解析函数之全体．称 $D_T(\rho)$ 为关于算子的 Doob 族，并且定义关于算子的 Doob 范数：

$$\|f\|_D=\sup_{z\in\Delta}\|f'(z)\|(1-|z|). \tag{5.6.3}$$

Pommerenke[99]根据 Bloch 定理[68]给出了 Bloch 范数．对于算子值解析函数，我们定义类似的范数：

$$\|f\|_B=\sup_{z\in\Delta}\|f'(z)\|(1-|z|^2); \tag{5.6.4}$$

并且称 f 是 Bloch 函数，如果 $\|f\|_B<\infty$. 显然，由(5.6.3)与(5.6.4)，我们有下面的关系：

$$\|f\|_D\leqslant\|f\|_B\leqslant 2\|f\|_D.$$

从而，$\|f\|_D<\infty$ 当且仅当 $\|f\|_B<\infty$.

引理 5.6.1 设 f 是 Δ 上可逆的算子值 Bloch 函数，并且开子域 $D_1\subseteq\Delta$ 的边界由两条解析弧 γ 和 γ' 构成使得

$$\left.\begin{aligned}&\|f(z)^{-1}\|\geqslant\frac{1}{m},z\in\gamma,\\&\qquad\qquad\geqslant\frac{1}{M},z\in D_1,\\&\|f(z_0)^{-1}\|=\frac{1}{M},z\in\gamma'\text{ 的某一内点}.\end{aligned}\right\} \tag{5.6.5}$$

令 $\omega(z)$ 是 D_1 上的调和测度使其在 γ 上等于1，在 γ' 上等于0[68][3]．则我们有

$$\frac{1}{m}\geqslant\frac{1}{M}\cdot\exp\left\{\frac{-\|f\|_B\cdot\lambda_p}{M}\right\},\lambda_p=\frac{1}{(1-|z_0|)^2\frac{\partial\omega(z_0)}{\partial n}},\quad(5.6.6)$$

其中 $\frac{\partial\omega}{\partial n}$ 为关于 γ' 的内法向之法向导数．

证明 ：设 $g(z)=f(z)^{-1},z\in\Delta$. 因为对任意正数 c 以及任一可逆算子 $A\in B(H)$，$\|A\|\geqslant c$ 意味着 $\|A^{-1}\|\leqslant c^{-1}$，所以，由(5.6.5)式，我们有

$$\left.\begin{aligned}\|g(z)\|&\leqslant\frac{1}{m},z\in\gamma,\\&\leqslant\frac{1}{M},z\in D_1,\\\|g(z_0)\|&=\frac{1}{M},z_0\in\gamma'\text{ 的某一内点}.\end{aligned}\right\}\quad(5.6.7)$$

于是，对于 $z\in D_1$，由(5.6.7)以及(5.6.4)，我们得

$$\begin{aligned}\frac{1}{M}-\|g(z)\|&\leqslant\left\|\int_z^{z_0}g'(\omega)d\omega\right\|\\&\leqslant\|f\|_B\int_z^{z_0}\frac{|d\omega|}{\|f(\omega)\|^2(1-|\omega|^2)}=B(z).\end{aligned}$$

(5.6.8)

令

$$h(z)=\frac{1}{M}\left(\frac{M}{m}\right)^{\omega(z)},z\in D_1.$$

则我们有

$$\|g(z)\|\leqslant h(z),z\in\gamma\cup\gamma'.$$

于是，由算子值解析函数的最大模原理，我们得

$$\|g(z)\|\leqslant h(z),z\in D_1,\quad(5.6.9)$$

考虑(5.6.8)与(5.6.9)，对于 $z\in D$，我们得

$$\log\left(\frac{1}{M}-B(z)\right)\leqslant\log\|g(z)\|\leqslant\log\frac{1}{M}+\omega(z)\log\frac{M}{m}.$$

取法向导数[3]得

$$-\frac{\partial B(z_0)}{\partial n}\Big/\left(\frac{1}{M}-B(z_0)\right)\leqslant\frac{\partial\omega(z_0)}{\partial n}\log\frac{M}{m}. \quad (5.6.10)$$

因为 $B(z_0)=0$ 且 $\|f(z_0)\|=M$，所以，由 $B(z_0)$ 的定义，

$$\frac{\partial B(z_0)}{\partial n}=\frac{\|f\|_B}{M^2(1-|z_0|)^2)},$$

因此，将上式代入(5.6.10)式即得(5.6.6)式．∎

特别地，正如 Lehto 和 Virtanen 在[86]中所考虑的，我们有下面的引理 5.6.2，证明略去．

引理 5.6.2 设 β 为月牙形区域 D_1 的边界 $\partial\Delta$ 上的弧与其对向弦的内角．如果 $f(z)$ 是 Δ 上一可逆算子值 Bloch 函数，并且满足(5.6.5)式，则我们有

$$\frac{1}{m}\geqslant\frac{1}{M}\exp\left\{\frac{-\|f\|_B\beta}{2M\sin\beta}\right\}. \quad (5.6.11)$$

设 γ 是 $\partial\Delta$ 上的一段弧，并且 $\omega(z,\gamma,\Delta)$ 是 $z\in\gamma$ 的调和测度，即 $\omega(z,\gamma,\Delta)$ 是 γ 上为 1，$\partial\Delta\backslash\gamma$ 上为 0 的调和函数．定义 Δ 内一凸镜状区域：

$$L(\alpha,\gamma)=\left\{z\in\Delta;\omega(z,\gamma,\Delta)\geqslant\frac{\pi-\alpha}{\pi},0<\alpha<\pi\right\}. \quad (5.6.12)$$

容易验证 $\partial L(\alpha,\gamma)\cap\Delta$ 与 $\partial\Delta$ 的夹角为 α. 由引理 5.6.2，我们可以证明引理 5.6.3.

引理 5.6.3 设 $A(\beta)=\{e^{i\theta};-\beta\leqslant\theta\leqslant\beta,0<\beta<\pi\}$，并且 $L(\beta,A(\beta))$ 为(5.6.12)定义的凸镜状区域．如果 $f(z)$ 是 Δ 上一可逆算子值 Bloch 函数，并且对于 $z\in A(\beta)$，满足定义 5.6.1 中的条件(ii)，以及

$$\|f(z)\|\geqslant\frac{1}{M},z\in L(\beta,A(\beta)),M>1,$$

$$\|f(z_0)\|=\frac{1}{M},z_0\in\partial L(\beta,A(\beta))\backslash A(\beta)\text{ 的某一点},$$

则 M 满足下面两个不等式：

$$1\geqslant M\exp\left\{\frac{-\|f\|_BM\beta}{2\sin\beta}\right\}, \quad (5.6.13)$$

$$1 \geqslant M\exp\left\{\frac{-\|f\|_D M\beta}{2\sin\beta}\right\}. \qquad (5.6.14)$$

我们所需要的实际上是较引理 5.6.3 更精确的等式，即引理 5.6.4.

引理 5.6.4　设 $A(\beta)$和 $L(\beta,A(\beta))$如引理 5.6.3 所定义，如果 $f(z)$为 Δ 上的可逆算子值 Bloch 函数，并且对于 $z\in A(\beta)$，满足定义 5.6.1 中的条件(ii)，则对于 $z\in L(\beta,A(\beta))$，我们有

$$\|f(z)\| \geqslant \frac{1}{M_1}, M_1>1, \qquad (5.6.15)$$

其中 M_1 为下列方程的最小解：

$$1=M\exp\left\{\frac{-\|f\|_B}{2\sin\beta}M\beta\right\}, \qquad (5.6.16)$$

$$1=M\exp\left\{\frac{-\|f\|_D}{2\sin\beta}M\beta\right\}. \qquad (5.6.17)$$

证明　我们使用 Hwang 在[76]中的证明方法. 首先，令

$$\min_{z\in L}\|f(z)\|=\frac{1}{M}, M>1,$$

其中 $L=L(\beta,A(\beta))$. 如果 $M\leqslant M_1$，则定理得证. 因此，我们假设 $M>M_1$. 由定义 5.6.1 中的条件(ii)，存在凸镜状区域 $L'(\beta',A(\beta'))\subseteq L$，其中 $\beta'<\beta$，使得

$$\min_{z\in L'}\|f(z)\|=\frac{1}{M_1}, \text{其中 } L'=L'(\beta',A(\beta')).$$

现在我们考虑从 Δ 到 Δ 内的 Möbius 变换：$\omega(z)=\frac{z-\zeta}{1-\bar{\zeta}z}$，其中 $\zeta\in\Delta$. 令

$$g(z)=f(\omega(z)), z\in\Delta.$$

则容易证明它的 Bloch 范数

$$\|g\|_B=\|f\|_B.$$

由此，不失一般性，我们可设 f 在 L' 上的最小值在点 $p=\cos\beta'$ 处达到，即

$$\|f(p)\|=\frac{1}{M_1},\text{其中 }\beta'<\beta\text{ 且 }M_1<M.$$

于是，由 M_1 和 β' 分别替代(5.6.13)式中的 M 及 β，我们得

$$1\geqslant M_1\exp\left\{\frac{-\|f\|_B M_1\beta'}{2\sin\beta'}\right\}. \qquad (5.6.18)$$

因为函数$\frac{\theta}{\sin\theta}$在$[0,\pi]$上严格增加，所以，由(5.6.16)及(5.6.18)必得

$$1>M_1\exp\left\{\frac{-\|f\|_B M_1\beta}{2\sin\beta}\right\}=1,$$

即得矛盾不等式．由此矛盾必可推知 $M\leqslant M_1$，从而引理 5.6.4 得证．

定理 5.6.1 设 $f(z)$ 为 Δ 上任意具有 $K_T(\rho)(\rho<\rho_0)$ 性质的可逆算子值解析函数，并且 $0<\varepsilon<1$．则我们有函数 f 的 Bloch 范数和 Doob 范数估计：

$$\|f\|_B>2(1-\varepsilon)\left\{\log\frac{1+\cos(\rho/2)}{1-\cos(\rho/2)}\right\}^{-1}, \qquad (5.6.19)$$

$$\|f\|_D>(1-\varepsilon)\left\{\log\frac{1}{1-\cos(\rho/2)}\right\}^{-1}. \qquad (5.6.20)$$

但当 $\varepsilon=0$ 时上述估计不成立．

证明 我们利用反证法证明(5.6.19)式成立．假设对于任意小的 $\rho>0$，均有

$$\|f\|_B\leqslant(1-\varepsilon)d(\rho),d(\rho)=2\left\{\log\frac{1+\cos(\rho/2)}{1-\cos(\rho/2)}\right\}^{-1}. \qquad (5.6.21)$$

根据定义 5.6.1 中的条件(i)以及(5.6.4)式，我们有

$$\|f(x)\|\leqslant\int_0^x\|f'(x)\|dx\leqslant\int_0^x\frac{\|f\|_B dx}{1-x^2}$$
$$=\|f\|_B\cdot\frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x},0\leqslant x<1. \qquad (5.6.22)$$

特别地，若 $x=\cos(\rho/2)$，则由(5.6.21)及(5.6.22)，我们得

$$\|f(\cos(\rho/2))\|\leqslant 1-\varepsilon. \qquad (5.6.23)$$

另一方面，将 $\beta=\rho/2$ 代入引理 5.6.4 中的(5.6.15)及(5.6.16)式得

$$\|f(\cos(\rho/2))\|\geqslant\frac{1}{M_1},\tag{5.6.24}$$

并且

$$\frac{1}{M_1}=\exp\left\{\frac{-\|f\|_B M_1(\rho/2)\rho/2}{2\sin(\rho/2)}\right\}.\tag{5.6.25}$$

我们将证明当 $\rho\to0^+$ 时，$M_1(\rho)\to1^+$. 为此，我们首先注意到

$$\frac{\rho/2}{2\sin(\rho/2)}\leqslant\frac{\pi}{4},0\leqslant\rho\leqslant\pi,\tag{5.6.26}$$

并且

$$M_1=\exp\left\{\frac{\|f\|_B M_1\beta}{2\sin\beta}\right\}=e.\tag{5.6.27}$$

事实上，在(5.6.16)式中，如果我们令函数 $h(M)$ 是(5.6.16)式右边，则 h 的最大值在点 $M^*=\frac{2\sin\beta}{\beta\|f\|_B}$ 处达到．从而 $M_1\leqslant M^*$，即

$$M_1\leqslant\frac{2\sin\beta}{\beta\|f\|_B}.\tag{5.6.28}$$

因此，将(5.6.28)代入(5.6.16)得(5.6.27)、由(5.6.21)中 $d(\rho)$ 的定义知：

$$\lim_{\rho\to0}d(\rho)=0.\tag{5.6.29}$$

因此，由(5.6.21)以及(5.6.24)—(5.6.29)得

$$M_1(\rho)\to1^+,\rho\to0^+.$$

从而，存在 $\rho_0>0$ 使得

$$\|f(\cos(\rho/2))\|>1-\varepsilon,\rho<\rho_0.$$

此不等式与(5.6.23)式矛盾．故(5.6.19)式成立．

下面我们证明 $\varepsilon>0$ 的条件不能省略掉．事实上，我们可以证明解析函数

$$f_n(z)=\frac{1}{2n}\log\frac{1+z}{1-z},n=n(\rho),\tag{5.6.30}$$

满足 $K_T(\rho)(z\in A(\rho/2))$ 性质且 $\|f_n\|_B=\frac{1}{n}$. 显然，$f_n(0)=0$. 因

此仅需验证条件(ii)成立．为此，令 ρ 为由下面等式确定的数：

$$\| f_n(\exp\{\frac{i\rho}{2}\}) \| = 1. \tag{5.6.31}$$

于是，由 f_n 的对称性，则对于 $z\in A(\rho/2)$，f_n 满足条件(ii)．然而，由(5.6.30)及(5.6.31)我们可唯一确定数

$$n = n(\rho) = \left(\left(\frac{1}{2}\log\frac{1+\cos(\rho/2)}{1-\cos(\rho/2)}\right)^2 + \frac{\pi^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

从而，$\| f_n \|_B = \frac{1}{n} = d(\rho) + o(\rho)$，其中当 $\rho\to 0^+$ 时，$o(\rho)\to 0^+$．故(5.6.19)为最佳估计．

最后，我们只须利用(5.6.17)以及考虑函数 $g_n(z) = \frac{1}{n}\log\frac{1}{1-z}$，按上述同样方法可证(5.6.20)式．故定理 5.6.1 成立． ∎

利用定理 5.6.1，我们可以得到定理 A 及定理 B 的推广[9].

定理 5.6.2 不存在具有 $K_T(\rho)$ 性质的可逆算子值函数满足条件：

$$(1-|z|^2)\| f'(z) \| \leqslant \frac{1}{n}, \ |z|<1, \tag{5.6.32}$$

其中 $n > N_1(\rho) = \frac{1}{2}\log\frac{1+\cos\rho}{1-\cos\rho}, 0<\rho<\rho_0<\frac{\pi}{2}$；

或者

$$(1-|z|)\| f'(z) \| \leqslant \frac{1}{n}, \ |z|<1, \tag{5.6.33}$$

其中 $n > N_2(\rho) = \log\frac{1}{1-\cos\rho}, 0<\rho<\rho_0<\frac{\pi}{2}$.

定理 5.6.3 设 T 为 Hilbert 空间 H 上的真压缩算子．则不存在具有 $K_T(\rho)$ 性质的可逆算子值函数满足条件：

$$(1-\| T \|^2)\| f'(T) \| \leqslant \frac{1}{n}, \ \| T \| <1, \tag{5.6.34}$$

其中 $n > N_1(\rho) = \frac{1}{2}\log\frac{1+\cos\rho}{1-\cos\rho}, 0<\rho<\rho_0<\frac{\pi}{2}$；

或者

$$(1-\|T\|)\|f'(T)\|\leqslant\frac{1}{n},\ \|T\|<1,\qquad(5.6.35)$$

其中 $n>N_2(\rho)=\log\frac{1}{1-\cos\rho}$，$0<\rho<\rho_0<\frac{\pi}{2}$.

定理 5.6.2 是定理 5.6.1 的直接推论．因此，我们只须证明定理 5.6.3.

证明　我们仅证第一种情形．第二种情形类似可证．

根据定理 5.6.2，存在点 $z_0\in\Delta$，使得

$$(1-|z_0|^2)\|f'(z_0)\|>\frac{1}{n},\text{其中 } n>N_1(\rho).$$

令 $T=z_0I$，则我们有

$$f'(z_0I)=f'(z_0)I,$$

从而

$$\|f'(T)\|=\|f'(z_0)\|,\text{其中 } T=z_0I.$$

因此，

$$(1-\|T\|^2)\|f'(T)\|>\frac{1}{n},\text{其中 } n>N_1(\rho).$$

定理证毕．　■

§5.7

算子值解析函数的角导数

下面是复分析中一个熟悉的定理：

设 Π 是右半复平面，f 是 Π 上的解析函数，并且 $f(\Pi)\subseteq\Pi$. 如果

$$a=\inf_{z\in\Pi}\frac{\mathrm{Re}f(z)}{\mathrm{Re}z},\qquad(5.7.1)$$

则对任意的 $k>0$，我们有

$$\lim_{\substack{z\to\infty \\ z\in\Sigma_k}}\frac{f(z)}{z}=\lim_{\substack{z\to\infty \\ z\in\Sigma_k}}\frac{\mathrm{Re}f(z)}{Rez}=\lim_{\substack{z\to\infty \\ z\in\Sigma_k}}f'(z)=a, \quad (5.7.2)$$

其中$\Sigma_k=\{z\in C;|\mathrm{Im}z|<k\mathrm{Re}z,k>0\}$.

根据 $\lim_{z\to\infty,z\in\Sigma_k}f'(z)$通常称为$f$在$\infty$的角导数．对于上述定理的细节，读者可以参考[34]和[120]．这一节，我们将给出上述经典定理在算子值解析函数中的推广情形．

设$H(\Delta,\Delta_H)$表示在Δ内解析且对所有$z\in\Delta,f(z)\in\Delta_H$的算子值函数类．类似地，$H(\Delta,\Pi_H)$表示在$\Delta$内解析且对所有$z\in\Delta$都有$G(z)\in\Pi_H$的算子值函数类．类似亦可定义$H(\Pi,\Delta_H)$和$H(\Pi,\Pi_H)$，其中$\Delta_H$及$\Pi_H$为§3.4中所定义的算子类．符号$\Phi(A,B)$，$\Psi(A,B)$分别为(3.4.11)及(3.4.16)式所定义的．下面的引理5.8.1实际上是算子的Pick-Julia定理的推广，即算子值解析函数的Pick-Julia定理．[71].

引理5.7.1 (a)如果$F\in H(\Delta,\Delta_H)$且$z,w\in\Delta$，则

$$\Phi(F(z),F(w))^*\Phi(F(z),F(w))\leqslant\left|\frac{z-w}{1-\overline{w}z}\right|^2 I. \quad (5.7.3)$$

(b)如果$G\in H(\Delta,\Pi_H)$且$z,w\in\Delta$，则

$$\Psi(G(z),G(w))^*\Psi(G,(z),G(w))\leqslant\left|\frac{z-w}{1-\overline{w}z}\right|^2 I. \quad (5.7.4)$$

(c)如果$H\in H(\Pi,\Delta_H)$且$z,w\in\Pi$，则

$$\Phi(H(z),H(w))^*\Phi(H(z),H(w))\leqslant\left|\frac{z-w}{z+\overline{w}}\right|^2 I. \quad (5.7.5)$$

(d)如果$K\in H(\Pi,\Pi_H)$且$z,w\in\Pi$，则

$$\Psi(K(z),K(w))^*\Psi(K(z),K(w))\leqslant\left|\frac{z-w}{z+\overline{w}}\right|^2 I. \quad (5.7.6)$$

证明 (a)的证明可见[23].

(b) 对于$z\in\Delta$，令$F(z)=\psi(G(z))$，其中ψ由(3.4.2)式给出．因为$G(z)\in\Pi_H$且$\psi\in H(\Pi,\Delta)$，所以，我们有$\psi(G(z))\in\Delta_H$

(见§3.4(iii)). 因此 $F\in H(\Delta,\Delta_H)$. 由引理3.4.3, 对于任意的 z, $w\in\Delta$, 我们有

$$\Phi(F(z),F(w))^*\Phi(F(z),F(w))$$
$$=U(w)^*\Psi(G(z),G(w))^*\Psi(G(z),G(w))U(w),\tag{5.7.7}$$

其中

$$U(w)=[\mathrm{Re}G(w)]^{-\frac{1}{2}}[G(w)^*+I]$$
$$\cdot\{[G(w)^*+I]^{-1}[\mathrm{Re}G(w)][G(w)+I]^{-1}\}^{\frac{1}{2}}$$

是酉算子. 由于 $F\in H(\Delta,\Delta_H)$, 则对任意的 $z,w\in\Delta$, 有(5.7.3)式成立. 因此, 由(5.7.3), (5.7.7)及 $U(w)$ 为酉算子可得(5.7.4).

(c) 设 $F=H\circ\varphi$, 其中 φ 由(3.4.1)式给出. 则 $F\in H(\Delta,\Delta_H)$. 因为 $H=F\circ\psi$, 所以

$$\Phi(H(z),H(w))=\Phi(F(\psi(z)),F(\psi(w))),$$

从而, 由(5.7.3)式, 对于任意的 $z,w\in\Pi$, 有

$$\Phi(H(z),H(w))^*\Phi(H(z),H(w))\leqslant\left|\frac{\psi(z)-\psi(w)}{1-\overline{\psi(w)}\psi(z)}\right|^2 I.$$

由于

$$\left|\frac{\psi(z)-\psi(w)}{1-\overline{\psi(w)}\psi(z)}\right|=\left|\frac{z-w}{z+\overline{w}}\right|,$$

所以(5.7.5)式成立.

(d) 设 $G=K\circ\varphi$, 则 $G\in H(\Delta,\Pi_H)$. 因为 $K=G\circ\psi$, 所以, 由(5.7.4)式, 我们得

$$\Psi(K(z),K(w))^*\Psi(K(z),K(w))$$
$$\leqslant\left|\frac{\psi(z)-\psi(w)}{1-\overline{\psi(w)}\psi(z)}\right|^2 I=\left|\frac{z-w}{z+\overline{w}}\right|^2 I.$$

故引理5.7.1证毕. ▌

引理 5.7.2 设 F 是 Π 上的算子值解析函数, 并且对于每个 $z\in\Pi$, $\mathrm{Re}F(z)>0$. 如果对于某个 $z_0\in\Pi$, $F(z_0)=I$, 则

$$\|F(z)\|\leqslant\frac{(|z|+|z_0|)^2}{(\mathrm{Re}z)(\mathrm{Re}z_0)},z\in\Pi. \tag{5.7.8}$$

证明 根据 Ψ 的定义知：

$$\Psi(F(z),I)=[F(z)-I][F(z)+I]^{-1}.$$

于是，由引理 5.7.1(d)，对于 $z\in\Pi$，(5.7.6)式变为

$$[F(z)^*+I]^{-1}[F(z)^*-I][F(z)-I][F(z)+I]^{-1}$$
$$\leqslant\left|\frac{z-z_0}{z+\bar{z}_0}\right|^2 I. \tag{5.7.9}$$

设 $\alpha(z)=\left|\frac{z-z_0}{z-\bar{z}_0}\right|^2$，则对于 $z\in\Pi$，$\alpha(z)<1$. 利用(5.7.9)式，对于 $z\in\Pi$，我们有

$$[F(z)^*-I][F(z)-I]\leqslant\alpha(z)[F(z)^*+I][F(z)+I],$$

亦可写为

$$\left[F(z)^*-\frac{1+\alpha(z)}{1-\alpha(z)}I\right]\left[F(z)-\frac{1+\alpha(z)}{1-\alpha(z)}I\right]\leqslant\frac{4\alpha(z)}{(1-\alpha(z))^2}I,$$

或者

$$\left\|F(z)-\frac{1+\alpha(z)}{1-\alpha(z)}I\right\|\leqslant\frac{2\alpha(z)^{\frac{1}{2}}}{1-\alpha(z)}.$$

因此

$$\begin{aligned}\|F(z)\|&\leqslant\left\|F(z)-\frac{1+\alpha(z)}{1-\alpha(z)}I\right\|+\frac{1+\alpha(z)}{1-\alpha(z)}\\&\leqslant\frac{2\alpha(z)^{\frac{1}{2}}}{1-\alpha(z)}+\frac{1+\alpha(z)}{1-\alpha(z)}\\&=\frac{(|z+\bar{z}_0|+|z-z_0|)^2}{4(\mathrm{Re}z)(\mathrm{Re}z_0)}\\&\leqslant\frac{(|z|+|z_0|)^2}{(\mathrm{Re}z)(\mathrm{Re}z_0)},z\in\Pi.\end{aligned}$$

故不等式(5.7.8)成立. ∎

利用上面的引理 5.8.2，我们可以证明下面的定理 5.7.1[54].

定理 5.7.1 设 F 是 Π 上的算子值解析函数，并且对于 $z\in\Pi$，$\mathrm{Re}F(z)>0$. 假设存在 H 上的 Hermite 算子 A 满足

$$\frac{\mathrm{Re}F(z)}{\mathrm{Re}z} > A, z \in \Pi, \tag{5.7.10}$$

并且对任意的 $\varepsilon > 0$，存在 $z_0 \in \Pi$ 使得

$$\left\| \frac{\mathrm{Re}F(z_0)}{\mathrm{Re}z_0} - A \right\| < \varepsilon. \tag{5.7.11}$$

则对于任意 $k > 0$，我们有

$$\lim_{\substack{z \to \infty \\ z \in \sum_k}} \left\| \frac{F(z)}{z} - A \right\| = \lim_{\substack{z \to \infty \\ z \in \sum_k}} \left\| \frac{\mathrm{Re}F(z)}{\mathrm{Re}z} - A \right\|$$
$$= \lim_{\substack{z \to \infty \\ z \in \sum_k}} \| F'(z) - A \| = 0.$$

证明 利用引理 5.7.2，定理 5.7.1 的证明是经典的 Landau-Valiron 证明[84,120]的算子形式．考虑固定的 $\varepsilon > 0$. 由假设，我们可以取 $z_0 \in \Pi$ 使得

$$\left\| \frac{\mathrm{Re}F(z_0)}{\mathrm{Re}z_0} - A \right\| < \varepsilon.$$

定义 Π 上的算子值解析函数 E 和 G：

$$E(z) = F(z) - Az, \tag{5.7.12}$$

$$G(z) = [\mathrm{Re}E(z_0)]^{-\frac{1}{2}} [E(z) - i\mathrm{I_m}E(z_0)][\mathrm{Re}E(z_0)]^{-\frac{1}{2}}. \tag{5.7.13}$$

由(5.7.10)式，对于 $z \in \Pi$，$\mathrm{Re}E(z) > 0$. 又由

$$\mathrm{Re}G(z) = [\mathrm{Re}E(z_0)]^{-\frac{1}{2}} [\mathrm{Re}E(z)][\mathrm{Re}E(z_0)]^{-\frac{1}{2}}, \tag{5.7.14}$$

对于 $z \in \Pi$，我们也有 $\mathrm{Re}G(z) > 0$. 显然，$G(z_0) = I$. 应用引理 5.7.2 于函数 G，我们得

$$\| G(z) \| \leqslant \frac{(|z| + |z_0|)^2}{(\mathrm{Re}z)(\mathrm{Re}z_0)}, z \in \Pi. \tag{5.7.15}$$

于是，由(5.7.12)，(5.7.13)和(5.7.15)，对于 $z \in \Pi$，我们有

$$\left\| \frac{F(z)}{z} - A \right\| = \frac{\| E(z) \|}{|z|}$$

$$=\frac{1}{|z|}\|[\mathrm{Re}E(z_0)]^{\frac{1}{2}}G(z)[\mathrm{Re}E(z_0)]^{\frac{1}{2}}+i\mathrm{Im}E(z_0)\|$$

$$\leqslant\frac{1}{|z|}\|[\mathrm{Re}E(z_0)]^{\frac{1}{2}}\|^2\|G(z)\|+\frac{\|\mathrm{Im}E(z_0)\|}{|z|}$$

$$\leqslant\frac{\|[\mathrm{Re}E(z_0)]^{\frac{1}{2}}\|^2}{\mathrm{Re}z_0}\cdot\frac{(|z|+|z_0|^2)}{|z|(\mathrm{Re}z_0)}+\frac{\|\mathrm{Im}E(z_0)\|}{|z|}.$$

因为

$$\frac{\|[\mathrm{Re}E(z_0)]^{\frac{1}{2}}\|^2}{\mathrm{Re}z_0}=\frac{\|[\mathrm{Re}E(z_0)]\|}{\mathrm{Re}z_0}=\left\|\frac{\mathrm{Re}F(z_0)}{\mathrm{Re}z_0}-A\right\|<\varepsilon,$$

所以，对于 $z\in\Pi$，

$$\left\|\frac{F(z)}{z}-A\right\|\leqslant\varepsilon\cdot\frac{(|z|+|z_0|)^2}{|z|(\mathrm{Re}z)}+\frac{\|\mathrm{I_m}E(z_0)\|}{|z|}.$$

而对于 $z\in\sum_k$，我们有

$$\frac{(|z|+|z_0|)^2}{|z|(\mathrm{Re}z_0)}=\left(1+\left|\frac{z_0}{z}\right|\right)\frac{|z|+|z_0|}{\mathrm{Re}z}$$

$$\leqslant\left(1+\left|\frac{z_0}{z}\right|\right)\left(\sqrt{1+k^2}+\frac{|z_0|}{\mathrm{Re}z}\right).$$

因此，对于 $z\in\sum_k$，下面不等式

$$\left\|\frac{F(z)}{z}-A\right\|$$

$$\leqslant\varepsilon\left(1+\left|\frac{z_0}{z}\right|\right)\left(\sqrt{1+k^2}+\frac{|z_0|}{\mathrm{Re}z}\right)+\frac{\|\mathrm{Im}E(z_0)\|}{|z|}$$

成立，并且不等式的右边当 $z\in\sum_k$ 趋于 ∞ 时，趋于 $\varepsilon\sqrt{1+k^2}$. 利用 ε 为任意小的正数，我们可得

$$\lim_{\substack{z\to\infty\\ z\in\sum_k}}\left\|\frac{F(z)}{z}-A\right\|=0. \tag{5.7.16}$$

其次，由(5.7.12)式，我们有

$$\left\|\frac{\mathrm{Re}F(z)}{\mathrm{Re}z}-A\right\|=\left\|\frac{\mathrm{Re}E(z)}{\mathrm{Re}z}\right\|\leqslant\frac{\|E(z)\|}{\mathrm{Re}z}$$

$$=\frac{|z|}{\mathrm{Re}z}\left\|\frac{F(z)}{z}-A\right\|,z\in\Pi.$$

从而，对于 $z\in\sum_k$，

$$\left\|\frac{\mathrm{Re}F(z)}{\mathrm{Re}z}-A\right\|\leqslant\sqrt{1+k^2}\left\|\frac{F(z)}{z}-A\right\|. \tag{5.7.17}$$

由(5.7.16)以及(5.7.17)式，必有

$$\lim_{\substack{z\to\infty\\ z\in\sum_k}}\left\|\frac{\mathrm{Re}F(z)}{\mathrm{Re}z}-A\right\|=0.$$

最后，任取 $k>0$，选取 $h>0$ 足够小使得对每个 $z\in\sum_k$，均有

$$C_h(z)=\{w\in\mathrm{C};|w-z|=h(z)\}\subseteq\Pi.$$

于是，利用 Cauchy 积分公式[7]

$$E'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_h(z)}\frac{E(w)dw}{(w-z)^2},z\in\sum_k,$$

我们导出

$$\begin{aligned}\|E'(z)\|&\leqslant\frac{1}{h(z)}\max_{w\in C_h(z)}\|E(w)\|\\&=\frac{1}{h}\max_{w\in C_h(z)}\left|\frac{w}{z}\right|\cdot\left\|\frac{F(w)}{w}-A\right\|\\&\leqslant\frac{1+h}{h}\max_{w\in C_h(z)}\left\|\frac{F(w)}{w}-A\right\|;z\in\sum_k.\end{aligned}$$

因此，由(5.7.16)式，

$$\lim_{\substack{z\to\infty\\ z\in\sum_k}}\|F'(z)-A\|=\lim_{\substack{z\to\infty\\ z\in\sum_k}}\|E'(z)\|=0.$$

定理证毕．∎

第 六 章

多变量可交换压缩算子函数

前面我们所讨论的均为一个变量的算子函数的各种性质．实际上关于一个变量的算子函数的某些概念及其性质可以推广到多个变量可交换压缩算子函数的情形．在这一章里，我们将首先给出多变量可交换的解析算子函数的概念及其基本性质，由此导出两个变量的可交换压缩算子的 von Neumann 定理、Schwarz 引理以及多变量分次压缩算子函数的 von Neumann 定理等。

§ 6.1

定义与性质

在整个这一章里，我们以 **R** 表示实数域，**C** 表示复数域．对于给定的自然数 n，我们称 n 重有序复数集合为 n 维复数空间，并记为：

$$\mathbf{C}^n=\{z=(z_1,z_2,\cdots,z_n);z_v\in\mathbf{C},1\leqslant v\leqslant n\}.$$

对于 $z\in\mathbf{C}^n$ 的绝对值定义为：

$$|z|=\max\{|z_j|;1\leqslant j\leqslant n\},$$

其中 $|z_j|$ 为 z 的第 j 个分量的在通常复数意义下的绝对值．在 $\mathbf{C}^n$ 中的一个开多圆柱是 $\mathbf{C}^n$ 的一个子集：

$$\Delta(w,r)=\Delta(w_1,\cdots,w_n;r_1,\cdots,r_n)$$
$$=\{z\in\mathbf{C}^n;|z_j-w_j|<r_j,1\leqslant j\leqslant n\},$$

其中点 $w=(w_1,\cdots,w_n)\in\mathbf{C}^n$ 称为开多圆柱的中心，$r=(r_1,\cdots,r_n)\in\mathbf{R}^n(r_j>0,1\leqslant j\leqslant n)$ 称为开多圆柱的半径．$\Delta(w;r)$ 的闭包称为以 w 为中心，r 为半径的闭多圆柱，并且记为：

$$\overline{\Delta}(w,r)=\{z\in\mathbf{C}^n;|z_j-w_j|\leqslant r_j,1\leqslant j\leqslant n\}.$$

特别地，如果 $w=0$ 且 $r=(1,1,\cdots,1)$，我们记 $\Delta=\Delta(0;1)$，$\overline{\Delta}=\overline{\Delta}(0;1)$，其中 $0=(0,\cdots,0)$，$1=(1,\cdots,1)$．一般地，如果 $D_j\subset\mathbf{C}$ 是复平面上的任意子域(连通开子集)，则积集 $D=D_1\times\cdots\times D_n\subset\mathbf{C}^n$ 称为开域．当 D_j 都为开圆盘时，$D=D_1\times\cdots\times D_n$ 称为开多圆域．在开多圆域 $D\subset\mathbf{C}^n$ 上的一个复值函数 f 表示从 D 到 $\mathbf{C}$ 的一个映射；函数 f 在点 $z=(z_1,\cdots,z_n)\in D$ 的值像通常一样记为 $f(z)=f(z_1,\cdots,z_n)$．多复变函数理论的许多结果，例如 Cauchy 积分定理，级数展开，Cauchy 估计以及最大模原理等等，在这一章里将会多次引用，详细讨论读者可参考[63]或[64]．

设 H 是复 Hilbert 空间，$B_n(H)$ 是 H 上两两可交换的 n 重有界线性算子构成的复 Banach 空间．特别地，$B_1(H)=B(H)$，并且对于 $T=(T_1,T_2,\cdots,T_n)\in B_n(H)$，定义 T 的范数为

$$\|T\|=\max\{\|T_j\|;1\leqslant j\leqslant n\},$$

其中 $\|T_j\|$ 为 $T_j\in B(H)$ 在通常意义下的范数．

定义 6.1.1[63]　定义在多圆域 $D\subset\mathbf{C}^n$ 上的复值函数 f 称为在 D 内解析，如果对于每一点 $w\in D$，均存在一开邻域 U，$w\in U\subset D$，使得对于 $z\in U$，函数 f 的幂级数展开式：

$$f(z)=\sum_{v_1,\cdots,v_n=0}^{\infty}a_{v_1\cdots v_n}(z_1-w_1)^{v_1}\cdots(z_n-w_n)^{v_n}\qquad(6.1.1)$$

收敛．所有在 D 内解析的函数之全体记为 $H(D)$ 并记 $H_1(D)$ 为使得 $f\in H(D)$ 且 $|f(z)|<1(z\in D)$ 的函数全体．

定义 6.1.2　设 $f\in H(\Delta(0;r))$，$T\in B_n(H)$，并且 $\sigma(T)\subset\Delta(0;r)$，即 $\sigma(T_j)\subset\{z_j;|z_j|<r_j\}(1\leqslant j\leqslant n)$．定义算子

$$f(T)=(2\pi i)^{-n}\int_{\Gamma'}(\zeta_1 I-T_1)^{-1}\cdots(\zeta_n I-T_n)^{-1}f(\zeta)d\zeta$$
$$=(2\pi i)^{-n}\int_{|\zeta_1|=r_1'}(\zeta_1 I-T_1)^{-1}d\zeta_1\cdots\int_{|\zeta_n|=r_n'}(\zeta_n I-T_n)^{-1}\cdot$$
$$\cdot f(\zeta_1,\cdots,\zeta_n)d\zeta_n. \tag{6.1.2}$$

其中 $I\in B(H)$ 为恒等算子，Γ' 是 n-维环面使得 $\sigma(T)$ 包含在 Γ' 的内域 D' 中且 $D'U\Gamma'\subset\Delta(0;r)$. 积分按算子范数拓扑意义存在.

根据上面的定义，我们有下面几个性质.

性质 6.1.1 设 $f,f_N\in H(\Delta(0;R))(N=1,2,\cdots)$，并且对于 $z\in\Delta(0;R)$，$f_N(z)\to f(z)(N\to+\infty)$. 如果 $T\in B_n(H)$ 且 $\sigma(T)\subset\Delta(0;R)$，则

$$\|f_N(T)-f(T)\|\to 0\quad(N\to+\infty).$$

证明 由假设，对于 $z\in\Delta(0;R)$，$f_N(z)\to f(z)(N\to+\infty)$，即对于任给 $\epsilon>0$，存在正整数 N' 使得当 $N>N'$ 时，我们有

$$|f_N(z)-f(z)|<\epsilon\quad(z\in\Delta(0;R)).$$

因此，由(6.1.2)式，我们得

$$\|f_N(T)-f(T)\|$$
$$\leqslant\|(2\pi i)^{-n}\int_{\Gamma'}(\zeta_1 I-T_1)^{-1}\cdots(\zeta_n I-T_n)^{-1}[f_N(\zeta)-f(\zeta)]d\zeta\|$$
$$\leqslant(2\pi)^{-n}\int_{\Gamma'}\|(\zeta_1 I-T_1)^{-1}\cdots(\zeta_n I-T_n)^{-1}\|\cdot|f_N(\zeta)-f(\zeta)|d\zeta$$
$$\leqslant\max\{\|(\zeta_1 I-T_1)^{-1}\cdots(\zeta_n I-T_n)^{-1}\|;\zeta\in\Gamma'\}\cdot\epsilon.$$

故当 $N\to+\infty$ 时，$\|f_N(T)-f(T)\|\to 0$.

性质 6.1.2 设 f 在 $\Delta(0;R)$ 内解析，其中 $R=(R_1,\cdots,R_n)\in\mathbf{R}^n$，$R_j>0$，$1\leqslant j\leqslant n$，并且幂级数展开式为

$$f(z)=\sum_{\nu_1,\cdots,\nu_n=0}^{\infty}a_{\nu_1,\cdots,\nu_n}z_1^{\nu_1}\cdots z_n^{\nu_n},\ z\in\Delta(0;R). \tag{6.1.3}$$

如果 $T=(T_1,\cdots,T_n)\in B_n(H)$，其中 $\|T_j\|<R_j(1\leqslant j\leqslant n)$，则

$$f(T)=\sum_{\nu_1,\cdots,\nu_n=0}^{\infty}a_{\nu_1,\cdots,\nu_n}T_1^{\nu_1}\cdots T_n^{\nu_n}. \tag{6.1.4}$$

证明 对于 $T=(T_1,\cdots,T_n)\in B_n(H)$，其中 $\|T_j\|<R_j(1\leqslant j$

$\leqslant n$)，取 $r=(r_1,\cdots,r_n)\in\mathbf{R}^n$，使得 $\|T_j\|<r_j<R_j(1\leqslant j\leqslant n)$. 令

$$M=\max\{|f(z)|;z=(z_1,\cdots,z_n)\in\mathbf{C}^n,|z_j|=r_j,1\leqslant j\leqslant n\}.$$

由[63]定理 4.2，我们知

$$|a_{\nu_1,\cdots,\nu_n}|\leqslant M\cdot|r|^{-|\nu|}. \tag{6.1.5}$$

其中 $|r|=\max\{r_1,\cdots,r_n\}$，$|\nu|=\sum_{j=1}^{n}\nu_j$. 从而

$$\left\|\sum_{\nu_1,\cdots,\nu_n=0}^{\infty}a_{\nu_1,\cdots,\nu_n}T_1^{\nu_1}\cdots T_n^{\nu_n}\right\|\leqslant\sum_{\nu_1,\cdots,\nu_n=0}^{\infty}M\cdot\left(\frac{\|T\|}{|r|}\right)^{|\nu|}.$$

因此，级数

$$\sum_{\nu_1,\cdots,\nu_n=0}^{\infty}a_{\nu_1,\cdots,\nu_n}T_1^{\nu_1}\cdots T_n^{\nu_n}$$

在算子范数拓扑意义下收敛. 设 $\varphi\in B(H)^*$ 为任一范数为 1 的线性泛函. 令 $\delta=(\delta_1,\cdots,\delta_n)$，$\delta_j>0(1\leqslant j\leqslant n)$，使得 $\|T_j\|<\delta_j<r_j$ $(1\leqslant j\leqslant n)$，则

$$(2\pi i)^{-n}\int_{\Gamma_\delta}\sum_{\nu_1,\cdots,\nu_n=0}^{N}a_{\nu_1,\cdots,\nu_n}\varphi\{(\zeta_1I-T_1)^{-1}\cdots(\zeta_nI-T_n)^{-1}\}\cdot\zeta_1^{\nu_1}\cdots\zeta_n^{\nu_n}d\zeta\}$$

$$=(2\pi i)^{-n}\sum_{\nu_1,\cdots,\nu_n=0}^{N}\sum_{\mu_1,\cdots,\mu_n=0}^{\infty}\int_{\Gamma_\delta}a_{\nu_1,\cdots,\nu_n}\varphi(T_1^{\mu_1}\cdots T_n^{\mu_n})\cdot\zeta_1^{\nu_1-\mu_1-1}\cdots\zeta_n^{\nu_n-\mu_n-1}d\zeta$$

$$=\sum_{\nu_1,\cdots,\nu_n=0}^{N}a_{\nu_1,\cdots,\nu_n}\varphi(T_1^{\nu_1}\cdots T_n^{\nu_n}),$$

其中 $\Gamma_\delta=\{\zeta=(\zeta_1,\cdots,\zeta_n)\in\mathbf{C}^n;|\zeta_j|=\delta_j,1\leqslant j\leqslant n\}$. 因此

$$\left\|\varphi\left\{f(T)-\sum_{\nu_1,\cdots,\nu_n=0}^{\infty}a_{\nu_1,\cdots,\nu_n}T_1^{\nu_1}\cdots T_n^{\nu_n}\right\}\right\|$$

$$=(2\pi)^{-n}\left\|\int_{\Gamma_\delta}\cdot\sum_{\nu_1,\cdots,\nu_n=N+1}^{\infty}a_{\nu_1,\cdots,\nu_n}\varphi\{(\zeta_1I-T_1)^{-1}\cdots(\zeta_nI-T_n)^{-1}\}\cdot\zeta_1^{\nu_1}\cdots\zeta_n^{\nu_n}d\zeta\right\|$$

$$\leqslant (2\pi)^{-n}\underbrace{\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}}_{n}\sum_{\nu_1,\cdots,\nu_n=N+1}^{\infty}|a_{\nu_1,\cdots,\nu_n}|\cdot\|\varphi\{(\delta_1e^{i\theta_1}I-T_1)^{-1}$$

$$\cdots(\delta_ne^{i\theta_n}I-T_n)^{-1}\}\|\cdot\delta_1^{\nu_1+1}\cdots\delta_n^{\nu_n-1}d\theta_1\cdots d\theta_n$$

$$\leqslant (2\pi)^{-n}\underbrace{\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}}_{n}\sum_{\nu_1,\cdots,\nu_n=0}^{\infty}|a_{\nu_1,\cdots,\nu_n}|\cdot\|\varphi\|$$

$$\cdot\|(\delta_1e^{i\theta_1}I-T_1)^{-1}\cdots(\delta_ne^{i\theta_n}I-T_n)^{-1}\|$$

$$\cdot\delta_1^{\nu_1+1}\cdots\delta_n^{\nu_n+1}d\theta_1\cdots d\theta_n.$$

于是，由(6.1.5)式以及 $\|\varphi\|=1$ 得

$$\left\|\varphi\{f(T)-\sum_{\nu_1,\cdots,\nu_n=0}^{N}a_{\nu_1\cdots\nu_n}T^{\nu_1}\cdots T^{\nu_n}\}\right\|$$

$$\leqslant M\cdot\max\{\|(\zeta_1I-T_1)^{-1}\cdots(\zeta_nI-T_n)^{-1}\|;|\zeta_j|=\delta_j,1\leqslant j\leqslant n\}$$

$$\cdot\sum_{\nu_1,\cdots,\nu_n=N+1}^{\infty}|r|^{-|\nu|}\cdot|\delta|^{|\nu|+1}$$

$$\leqslant M_1\cdot|\delta|\cdot\sum_{\nu_1,\cdots,\nu_n=N+1}^{\infty}\left(\frac{|\delta|}{|r|}\right)^{|\nu|}\to 0(N\to+\infty).$$

因此，我们得(6.1.4)式．证毕． ∎

性质6.1.3 设 $f,g\in H(\Delta(0;R))$，其中 $R=(R_1,\cdots,R_n)\in\mathbf{R}^n$，$R_j>0(1\leqslant j\leqslant n)$，并且 $T=(T_1,\cdots,T_n)\in B_n(H)$，其中 $\sigma(T)\subseteq\Delta(0;R)$，即 $\sigma(T_j)\subseteq\{z_j;|z_j|<r_j\}(1\leqslant j\leqslant n)$．则

(i) $(f+g)(T)=f(T)+g(T)$；

(ii) $(f\cdot g)(T)=f(T)g(T)$；

(iii) 如果对于 $z\in\Delta(0;R)$，$f(z)^{-1}$存在，则 $f^{-1}(T)=f(T)^{-1}$，即

$$f^{-1}(T)=(2\pi i)^{-n}\int_{\Gamma_r}(\zeta_1I-T_1)^{-1}\cdots(\zeta_nI-T_n)^{-1}f(\zeta)^{-1}d\zeta,$$

其中 $\Gamma_r=\{\zeta\in\mathbf{C}^n;\zeta=(\zeta_1,\cdots,\zeta_n),|\zeta_j|=r_j,r=(r_1,\cdots,r_n)\}$ 且 $\sigma(T)$ 包含在 Γ_r 中的开多圆柱内以及 $\overline{\Delta}(0;r)\subseteq\Delta(0;R)$．

证明 (i)是显然的．现证(ii)．不失一般性，我们仅对 $n=2$

证明．取 $r=(r_1,r_2),\delta=(\delta_1,\delta_2)\in\mathbf{R}^2$ 使得 $\sigma(T)$ 包含在 Γ_r 中的 $\Delta(0;r)$ 内，Γ_δ 中的 $\Delta(0;\delta)$ 包含 $\Delta(0;r)\cup\Gamma_r$，并且 $\Delta(0;\delta)\cup\Gamma_\delta\subseteq\Delta(0;R)$，其中 Γ_r 和 Γ_δ 分别是 $\Delta(0;r)$ 和 $\Delta(0;\delta)$ 的 2 维环面．则我们有

$$
\begin{aligned}
&f(T)g(T)\\
&=(2\pi i)^{-4}\int_{\Gamma_r}(\zeta_1I-T_1)^{-1}(\zeta_2I-T_2)^{-1}f(\zeta)d\zeta\\
&\quad\cdot\int_{\Gamma_\delta}(z_1I-T_1)^{-1}(z_2-T_2)^{-1}g(z)dz\\
&=(2\pi i)^{-4}\iint\limits_{\Gamma_r\Gamma_\delta}(\zeta_1I-T_1)^{-1}(\zeta_2I-T_2)^{-1}(z_1I-T_1)^{-1}\\
&\qquad\cdot(z_2I-T_2)^{-1}f(\delta)g(z)d\zeta dz\\
&=(2\pi i)^{-4}\iint\limits_{\substack{|\zeta_1|=r_1\\|z_1|=\delta_1}}(\zeta_1I-T_1)^{-1}(z_1I-T_1)^{-1}d\zeta_1dz_1\\
&\quad\cdot\iint\limits_{\substack{|\zeta_2|=r_2\\|z_2|=\delta_2}}(\zeta_2I-T_2)^{-1}(z_2I-T_2)^{-1}f(\zeta)g(z)d\zeta_2dz_2\\
&=(2\pi i)^{-4}\iint\limits_{\substack{|\zeta_1|=r_1\\|z_1|=\delta_1}}(\zeta_1I-T_1)^{-1}\{(z_1I-T_1)-(\zeta_1I-T_1)\}\\
&\qquad\cdot(z_1I-T_1)^{-1}(z-\zeta_1)^{-1}d\zeta_1dz_1\\
&\quad\cdot\iint\limits_{\substack{|\zeta_2|=r_2\\|z_2|=\delta_2}}(\zeta_2I-T_2)^{-1}\{(z_2I-T_2)-(\zeta_2I-T_2)\}\\
&\qquad\cdot(z_2I-T_2)^{-1}(z_2-\zeta_2)^{-1}f(\zeta)g(z)d\zeta_2dz_2\\
&=(2\pi i)^{-4}\Big\{\iint\limits_{\substack{|\zeta_1|=r_1\\|z_1|=\delta_1}}(\zeta_1I-T_1)^{-1}(z_1-\zeta_1)^{-1}d\zeta_1dz_1\\
&\quad\cdot\iint\limits_{\substack{|\zeta_2|=r_2\\|z_2|=\delta_2}}(\zeta_2I-T_2)^{-1}(z_2-\zeta_2)^{-1}f(\zeta)g(z)d\zeta_2dz_2
\end{aligned}
$$

$$-\iint_{\substack{|\zeta_1|=r_1\\|z_1|=\delta_1}}(\zeta_1 I-T_1)^{-1}(z_1-\zeta_1)^{-1}d\zeta_1 dz_1$$

$$\cdot\iint_{\substack{|\zeta_2|=r_2\\|z_2|=\delta_2}}(z_2 I-\zeta_2)^{-1}(z_2-T_2)^{-1}f(\zeta)g(z)d\zeta_2 dz_2$$

$$-\iint_{\substack{|\zeta_1|=r_1\\|z_1|=\delta_1}}(\zeta_1 I-T_1)^{-1}(z_1-\zeta_1)^{-1}d\zeta_1 dz_1$$

$$\cdot\iint_{\substack{|\zeta_2|=r_2\\|z_2|=\delta_2}}(\zeta_2 I-T_2)^{-1}(z_2-\zeta_2)^{-1}f(\zeta)g(z)d\zeta_2 dz_2$$

$$+\iint_{\substack{|\zeta_1|=r_1\\|z_1|=\delta_1}}(z_1 I-T_1)^{-1}(z_1-\zeta_1)^{-1}d\zeta_1 dz_1$$

$$\left.\cdot\iint_{\substack{|\zeta_2|=r_2\\|z_2|=\delta_2}}(z_2 I-T_2)^{-1}(z_2 I-\zeta_2)^{-1}f(\zeta)g(z)d\zeta_2 dz_2\right\}$$

$$=(2\pi i)^{-4}\left\{\iint_{\substack{|\zeta_1|=r_1\\|z_1|=\delta_1}}(\zeta_1 I-T_1)^{-1}(\zeta_2 I-T_2)^{-1}f(\zeta)\right.$$

$$\cdot\left[\iint_{\substack{|z_1|=\delta_1\\|z_2|=\delta_2}}(z_1-\zeta_1)^{-1}(z_2-\zeta_2)^{-1}g(z)dz\right]d\zeta$$

$$-\iint_{\substack{|z_1|=\delta_1\\|z_2|=\delta_2}}(z_2 I-T_2)^{-1}g(z)$$

$$\left[\iint_{\substack{|\zeta_1|=r_1\\|\zeta_2|=r_2}}(\zeta_1 I-T_1)^{-1}(z_1-\zeta_1)^{-1}(z_2-\zeta_2)^{-1}f(\zeta)d\zeta\right]dz$$

$$-\iint_{\substack{|z_1|=\delta_1\\|z_2|=\delta_2}}(z_1 I-T_1)^{-1}g(z)$$

$$\left[\iint\limits_{\substack{|\zeta_1|=r_1\\|\zeta_2|=r_2}}(\zeta_2 I-T_2)^{-1}(z_1-\zeta_1)(z_2-\zeta_2)^{-1}f(\zeta)d\zeta\right]dz$$

$$+\iint\limits_{\substack{|z_1|=\delta_1\\|z_2|=\delta_2}}(z_1 I-T_1)^{-1}(z_2 I-T_2)^{-1}g(z)$$

$$\left.\left[\iint\limits_{\substack{|\zeta_1|=r_1\\|\zeta_2|=r_2}}(z_1-\zeta_1)^{-1}(z_2-\zeta_2)^{-1}f(\zeta)d\zeta\right]dz\right\}.$$

上式中的积分顺序的交换由各被积函数在算子范数拓扑意义下均连续(在 $\Gamma_r\times\Gamma_\delta$ 上)所保证．由[71]中的定理 3.11.1 和 3.11.3 知，在上面等式中最后表达式的方括号里的重积分值分别为：

$$\iint\limits_{\substack{|\zeta_1|=r_1\\|\zeta_2|=r_2}}(\zeta_1 I-T_1)^{-1}(z_1-\zeta_1)^{-1}(z_2-\zeta_2)^{-1}f(\zeta)d\zeta=0,$$

$$\iint\limits_{\substack{|\zeta_1|=r_1\\|\zeta_2|=r_2}}(\zeta_2 I-T_2)^{-1}(z_1-\zeta_1)^{-1}(z_2-\zeta_2)^{-1}f(\zeta)d\zeta=0,$$

$$\iint\limits_{\substack{|\zeta_1|=r_1\\|\zeta_2|=r_2}}(z_1-\zeta_1)^{-1}(z_2-\zeta_2)^{-1}f(\zeta)d\zeta=0,$$

$$\iint\limits_{\substack{|z_1|=\delta_1\\|z_2|=\delta_2}}(z_1-\zeta_1)^{-1}(z_2-\zeta_2)^{-1}g(z)dz=(2\pi i)^2 g(\zeta).$$

因此，我们得

$$f(T)g(T)=(2\pi i)^{-4}\iint\limits_{\substack{|\zeta_1|=r_1\\|\zeta_2|=r_2}}(\zeta_1 I-T_1)^{-1}(\zeta_2 I-T_2)^{-1}f(\zeta)g(\zeta)d\zeta$$
$$=(f\cdot g)(T).$$

故(ii)获证. 显然，(iii)是(ii)的直接推论. 从而性质 6.1.3 得证. ▌

性质 6.1.4 设 D,D' 为 $\mathbf{C}^n$ 内的开多圆柱．设 $f\in H(D)$，g：$D'\to D$ 是解析的，并且满足条件：对于 D' 的任一紧子集 K'，存在 D 的紧子集 K 使得对于算子 $T\in B_n(H)$ 当 $\sigma(T)\subseteq K'$ 时必有 $\sigma(g$

$(T))\subseteq K$. 则对于由 $h(z)=f(g(z))(z\in D')$ 所确定的"复合函数"$h=f\circ g$,我们有

$$(f\circ g)(T)=f(g(T)),$$

其中 $T\in B_n(H)$ 且 $\sigma(T)\subseteq D'$.

证明 不失一般性,不妨取一开多圆柱 $\Omega'\subseteq D'$ 使其 $\sigma(T)\subseteq\Omega'$ 且 $K'=\Omega'\cup\Gamma'\subseteq D'$,其中 Γ' 是 Ω' 的 n-维环面. 由假设条件,存在 D 的紧子集 K 使得对于所有 $T\in B_n(H)$ 且 $\sigma(T)\subseteq K'$ 均有 $\sigma(g(T))\subseteq K$. 则我们取一开多圆柱 $\Omega\subseteq D$ 使得 $\sigma(g(T))$ 和 K 包含在 Ω 内且 $\Omega\cup\Gamma\subseteq D$,其中 Γ 是 Ω 的 n 维环面. 于是,我们有

$$f(g(T))=(2\pi i)^{-n}\int_{\Gamma}f(\zeta)(\zeta_1I-g_1(T))^{-1}\cdots(\zeta_nI-g_n(T))^{-1}d\zeta, \tag{6.1.6}$$

其中 $g(z)=(g_1(z),\cdots,g_n(z)),z\in D'$. 设

$$(\zeta-g(z))^{-1}=(\zeta_1-g_1(z))^{-1}\cdots(\zeta_n-g_n(z))^{-1}.$$

由性质 6.1.3,对于 $\zeta\in\Gamma$,我们得

$$\begin{aligned}&(\zeta I-g(T))^{-1}\\&=(\zeta_1I-g_1(T))^{-1}\cdots(\zeta_nI-g_n(T))^{-1}\\&=(2\pi i)^{-n}\int_{\Gamma'}(z_1I-T_1)^{-1}\cdots(z_nI-T_n)^{-1}(\zeta-g(z))^{-1}dz.\end{aligned} \tag{6.1.7}$$

因此,由(6.1.6)与(6.1.7)式得

$$\begin{aligned}&f(g(T))\\&=(2\pi i)^{-2n}\int_{\Gamma}\int_{\Gamma'}(z_1I-T_1)^{-1}\cdots(z_nI-T_n)^{-1}\\&\quad(\zeta-g(z))^{-1}f(\zeta)dzd\zeta\\&=(2\pi i)^{-2n}\int_{\Gamma'}\left\{\int_{\Gamma}(\zeta-g(z))^{-1}f(\zeta)d\zeta\right\}\\&\quad(z_1I-T_1)^{-1}\cdots(z_nI-T_n)^{-1}dz\\&=(2\pi i)^{-2n}\int_{\Gamma'}f(g(z))(z_1I-T_1)^{-1}\cdots(z_nI-T_n)^{-1}dz\\&=(f\circ g)(T).\end{aligned}$$

上面的积分顺序可交换是由$(\zeta-g(z))^{-1}$在$\Gamma\times\Gamma'$上连续所保证的．故性质 6.1.4 得证． ▌

§6.2

两个交换压缩算子函数的 von Neumann 定理

在§3.1 中我们给出了著名的 von Neumann 定理的算子化，即定理 3.1.2，以及算子的 Schwarz 引理．对于两个交换算子的二元解析函数同样有类似的结果[10].

定理 6.2.1　设 f 在 $\overline{\Delta}(0;1)=\overline{\Delta}(1=(1,1)\in\mathbf{R}^2)$上解析，并且对于所有$(z_1,z_2)\in\overline{\Delta}$，$|f(z_1,z_2)|\leqslant 1$．则对于 $T=(T_1,T_2)\in B_2(H)$且$\|T\|\leqslant 1$，我们有

$$\|f(T_1,T_2)\|\leqslant 1. \tag{6.2.1}$$

证明　因为 $f\in H(\Delta)$，所以 f 有幂级数展开式

$$f(z)=\sum_{\nu_1,\nu_2=0}^{\infty}a_{\nu_1,\nu_2}z_1^{\nu_1}z_2^{\nu_2},\ z=(z_1,z_2)\in\Delta.$$

于是，由性质 6.1.2，我们有 $0=v$，

$$f(T)=\sum_{\nu_1,\nu_2=0}^{\infty}a_{\nu_1,\nu_2}T_1^{\nu_1}T_2^{\nu_2},\ T=(T_1,T_2)\in B_2(H),$$

且$\|T\|\leqslant 1$．令

$$S_N(z)=\sum_{\nu_1,\nu_2=0}^{N}a_{\nu_1,\nu_2}z_1^{\nu_1}z_2^{\nu_2},$$

其中 $N=(N_1,N_2)\in\mathrm{N}\times\mathrm{N}$．则

$$S_N(T)=\sum_{\nu_1,\nu_2=0}^{N}a_{\nu_1,\nu_2}T_1^{\nu_1}T_2^{\nu_2},\ \|T\|\leqslant 1.$$

因此，由 Ando 不等式[22][43]，

$$\|S_N(T)\|\leqslant\sup_{\substack{|z_1|\leqslant 1\\|z_2|\leqslant 1}}|S_N(z_1,z_2)|.$$

令 $N\to+\infty$，即 $N_j\to+\infty(j=1,2)$，我们得

$$\|f(T_1,T_2)\|\leqslant\sup_{\substack{|z_1|\leqslant1\\|z_2|\leqslant1}}|f(z_1,z_2)|\leqslant1.$$

故(6.2.1)式成立．∎

定理 6.2.2　设 f 在 $\Delta=\Delta(0;1)$ 内解析．对于 $0\leqslant r<1$，令

$$M(r)=\max_{|z|=r}|f(z)|,z=(z_1,z_2)\in\Delta.$$

则

$$M(r)=\max_{\|T\|\leqslant r}\|f(T)\|,0\leqslant r<1. \tag{6.2.2}$$

其中上式中的"max"取遍 $H\times H$ 上的所有算子 $T=(T_1,T_2)\in B_2(H)$ 且 $\|T\|\leqslant r$.

证明　不妨设 f 不恒为 0 且 $r>0$. 考虑一固定的 r 使得 $0<r<1$，我们有 $M(r)>0$. 定义函数 g 如下：

$$g(z)=f(rz)/M(r).$$

显然，函数 g 在$\{z;|z|<\frac{1}{r}\}$内解析．由多复变函数的最大模原理[64]，有

$$|g(z)|\leqslant1,z\in\overline{\Delta}.$$

于是，由定理 6.1.1，对于每个压缩算子 $T\in B_2(H)$，我们有

$$\|g(T)\|\leqslant1.$$

从而

$$\|f(rT)\|\leqslant M(r),\|T\|\leqslant1.$$

上面不等式等价于

$$\|f(T)\|\leqslant M(r),\|T\|\leqslant r.$$

进一步可得，如果 $|z_0|=r$ 且 $|f(z_0)|=M(r)$，则 $\|z_0I\|=r$ 且

$$\|f(z_0I)\|=\|f(z_0)I\|=|f(z_0)|=M(r).$$

故(7.2.2)式成立．∎

定理 6.2.2 即为两个交换压缩算子的二元解析函数的最大模原理．

定理 6.2.3　设 $f,g,h\in H(\Delta)$，并且对于所有 $z\in\overline{\Delta}$，$f(z)=$

$g(z)h(z)$以及$|h(z)|\leqslant 1$. 则对于$T=(T_1,T_2)\in B_2(H)$且$\sigma(T)\subseteq\overline{\Delta}$,我们有

$$g(T)^*g(T)\geqslant f(T)^*f(T),\tag{6.2.3}$$

$$\|g(T)\|\geqslant\|f(T)\|.\tag{6.2.4}$$

证明　如果$h(z)=\eta$且$|\eta|=1$,则显然(6.2.3)与(6.2.4)式的等式成立,即定理得证. 现假设h不是绝对值为1的复常数. 于是,由性质6.1.3,

$$f(T)=h(T)g(T).$$

从而,对于$x\in H$,我们有

$$\begin{aligned}&(f(T)^*f(T)x,x)=(f(T)x,f(T)x)\\&=\|f(T)x\|^2=\|h(T)g(T)x\|^2\\&\leqslant\|h(T)\|^2\|g(T)x\|^2=\|h(T)\|^2(g(T)x,g(T)x)\\&=\|h(T)\|^2(g(T)^*g(T)x,x).\end{aligned}$$

因此,

$$\|h(T)\|^2g(T)^*g(T)\geqslant f(T)^*f(T).$$

于是

$$g(T)^*g(T)-f(T)^*f(T)\geqslant(1-\|h(T)\|^2)g(T)^*g(T).\tag{6.2.5}$$

利用假设条件:对于$z\in\overline{\Delta}$,$|h(z)|\leqslant 1$,以及定理6.2.1,我们知

$$\|h(T)\|\leqslant 1,\ \|T\|\leqslant 1.$$

从而

$$(1-\|h(T)\|^2)g(T)^*g(T)\geqslant 0.\tag{6.2.6}$$

因此,由(6.2.6)与(6.2.5)式知(6.2.3)式成立. 显然,不等式(6.2.4)是(6.2.3)式的直接结果. 故定理6.2.3得证. ▌

定理 6.2.4　设f在Δ的邻域内解析,并且f在$z=(0,0)$处的零点阶数为k以及对于$z\in\overline{\Delta}$,$|f(z)|\leqslant 1$. 则对于压缩算子$T=(T_1,T_2)\in B_2(H)$,我们有

$$\|f(T)\|\leqslant\|T\|^k.$$

证明　函数f有展开式[64]

$$f(z)=p_k(z)+p_{k+1}(z)+\cdots, z=(z_1,z_2)\in\Delta,$$

其中 $p_j(z)(j\geqslant k)$ 为齐次多项式．由性质 6.1.3，对于压缩算子 $T\in B_2(H)$，

$$f(T)=p_k(T)+p_{k+1}(T)+\cdots.$$

定义函数 g：

$$g(t)=t^{-k}f(t\|T\|^{-1}T), t\in\mathbf{C}, |t|\leqslant 1.$$

则函数 g 有 Taylor 展开式

$$g(t)=p_k(\|T\|^{-1}T)+p_{k+1}(\|T\|^{-1}T)t+\cdots,$$

并且，由定理 6.2.1，对于 $|t|=1$，我们有

$$\|g(t)\|=\left\|t^{-k}f(t\|T\|^{-1}T)\right\|=\left\|f(t\|T\|^{-1}T)\right\|\leqslant 1.$$

因此，由定理 6.2.2，我们得

$$\|g(t)\|\leqslant 1, |t|\leqslant 1.$$

取 $t=\|T\|$，则可得

$$\left\|\|T\|^{-k}f(T)\right\|=\left\|g(\|T\|)\right\|\leqslant 1.$$

由此可得

$$\|f(T)\|\leqslant\|T\|^k. \qquad \blacksquare$$

注：这一节我们给出了两个交换压缩算子的 von Neumann 定理．自然，人们要问是否对任意有限多个交换压缩算子都有 von Neumann 定理？回答是否定的，在一般情形下结论不成立（见 §6.4 的反例）．那么，对于多个交换压缩算子在什么条件下有 von Neumann 定理的问题，我们将在 §6.4 中回答．

§6.3

多元算子多项式的保正性

设 A 为 Hilbert 空间 H 上的一个 Hermite 有界线性算子，其上、下确界分别为 M, m。如果 $P(x)$是$[m,M]$上非负实系数多项

式，则 $P(A)\geqslant 0$. 我们利用数学归纳法可将此结果推广到多变量算子多项式的情形，并由此可推得关于正规算子不等式的转化定理.

设 $A_1,\cdots,A_n$ 是 H 上两两可交换的 Hermite 有界线性算子. 考虑实系数多项式

$$P(t_1,\cdots,t_n)=\sum_{|s|=1}^{p}a_s t_1^{s_1}\cdots t_n^{s_n},\ s=(s_1,\cdots,s_n).$$

则此多项式对应于一个算子多项式

$$P(A_1,\cdots,A_n)=\sum_{|s|=1}^{p}a_s A_1^{s_1}\cdots A_n^{s_n},$$

并且 $P(A_1,\cdots,A_n)$ 也是 H 上的 Hermite 有界线性算子.

如果 $A_1,\cdots,A_n$ 的上、下确界分别为 $M_1,m_1;\cdots;M_n,m_n$，即

$$M_i=\sup_{\|x\|=1}(A_i x,x),\ m_i=\inf_{\|x\|=1}(A_i x,x),\ (1\leqslant i\leqslant n).$$

并且在区域 $m_i\leqslant t_i\leqslant M_i(i=1,2,\cdots,n)$ 上有 $P(t_1,\cdots,t_n)\geqslant 0$，那么，我们自然要问是否 $P(A_1,\cdots,A_n)$ 为正算子. 回答是肯定的. 为了证明这一事实，我们先叙述两个引理.

引理 6.3.1[104] 设 A、B 为 Hilbert 空间 H 上两个可交换的 Hermite 有界线性算子，并且 $A\geqslant 0$，$B\geqslant 0$. 则 $AB\geqslant 0$.

引理 6.3.2 若在 $[m,M]$ 上

$$P(t)=\sum_{s=0}^{p}a_s t^s>0,$$

并且对任意的自然数 r，我们有

$$r>p\cdot\max_k\left\{1+\frac{[8|\gamma_k|+6M_0]^2}{4|I_m\gamma_k|^2}\right\},\qquad(6.3.1)$$

则必存在 $c_s>0$，$s=0,1,2,\cdots,r$ 使得

$$P(t)=\sum_{s=0}^{r}c_s(t-m)^s(M-t)^{r-s},$$

其中 $M_0=|M|+|m|$，而 $\{\gamma_k\}$ 是方程 $P(z)=0$ 的一切满足下列条件的根：

$$\mathrm{Re}\gamma_k\in[m,M]\text{ 且 }\mathrm{Im}\gamma_k\neq 0.$$

证明　由于当 $t\in[m,M]$ 时有 $P(t)>0$，故方程 $P(z)=0$ 在 $[m,M]$ 上无实根．设 $P(z)=0$ 的根为：

(1)　$\{\alpha_i\}$，α_i 为实数且 $\alpha_i<m$；

(2)　$\{\beta_j\}$，$\beta_j>M$，β_j 为实数；

(3)　$\{\gamma_k\}$，$\mathrm{Re}\gamma_k\in[m,M]$，$\mathrm{Im}\gamma_k\neq 0$；

(4)　$\{x_q\}$，$\mathrm{Re}x_q\notin[m,M]$，$\mathrm{Im}\gamma_k\neq 0$.

由代数基本定理知，存在正数 c 使得对 $t\in[m,M]$ 有

$$P(t)=c\prod_i(t-\alpha_i)\prod_j(\beta_j-t)\prod_q(t^2-2\mathrm{Re}x_q t+|x_q|^2)\cdot\prod_k(t^2-2\mathrm{Re}\gamma_k t+|\gamma_k|^2).$$

注意到

(a)　$t-\alpha_i=\dfrac{M-\alpha_i}{M-m}(t-m)+\dfrac{m-\alpha_i}{M-m}(M-t)$，

(b)　$\beta_j-t=\dfrac{\beta_j-M}{M-m}(t-m)+\dfrac{\beta_j-m}{M-m}(M-t)$，

(c)　$t^2-2\mathrm{Re}x_q t+|x_q|^2=(t-\mathrm{Re}x_q)^2+(\mathrm{Im}x_q)^2$.

当 $m>\mathrm{Re}x_q$ 时有：

$$\begin{aligned}t^2-2\mathrm{Re}x_q t+|x_q|^2&=(t-m+m-\mathrm{Re}x_q)^2+(\mathrm{Im}x_q)^2\\&=\left\{1+\frac{2(m-\mathrm{Re}x_q)}{M-m}+\frac{(m-\mathrm{Re}x_q)^2+(\mathrm{Im}x_q)^2}{(M-m)^2}\right\}(t-m)^2\\&\quad+\left\{\frac{2(m-\mathrm{Re}x_q)}{M-m}+\frac{2[(m-\mathrm{Re}x_q)^2+(\mathrm{Im}x_q)^2]}{(M-m)^2}\right\}(t-m)(M-t)\\&\quad+\frac{(m-\mathrm{Re}x_q)^2+(\mathrm{Im}x_q)^2}{(M-m)^2}(M-t)^2;\end{aligned}$$

同理当 $M<\mathrm{Re}x_q$ 时有：

$$\begin{aligned}t^2-2\mathrm{Re}x_q t+|x_q|^2&=(t-M+M-\mathrm{Re}x_q)^2+(\mathrm{Im}x_q)^2\\&=\left\{1+\frac{2(\mathrm{Re}x_q-M)}{M-m}+\frac{(\mathrm{Re}x_q-M)^2+(\mathrm{Im}x_q)^2}{(M-m)^2}\right\}(M-t)^2\\&\quad+2\left[\frac{\mathrm{Re}x_q-M}{M-m}+\frac{(\mathrm{Re}x_q-M)^2+(\mathrm{Im}x_q)^2}{(M-m)^2}\right](M-t)(t-m)\\&\quad+\frac{(\mathrm{Re}x_q-M)^2+(\mathrm{Im}x_q)^2}{(M-m)^2}(t-m)^2;\end{aligned}$$

(d) $t^2-2\mathrm{Re}\gamma_k t+|\gamma_k|^2=(t-m)^2+2B_k(t-m)+A_k$,

其中 $B_k=m-\mathrm{Re}\gamma_k\leqslant 0, A_k=m^2-2m(\mathrm{Re}\gamma_k)+|\gamma_k|^2$.

易知 $B_k^2<A_k$. 利用二项式定理:

$$(M-m)^{n-i}=\sum_{k=i}^{n}\mathrm{C}_{n-i}^{k-i}(t-m)^{k-i}(M-t)^{n-k}, n\geqslant 2, i=0,1,2,\cdots,$$

可知

$$\begin{aligned}
&(t-m)^2+2B_k(t-m)+A_k\\
&=A_k\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k(t-m)^k(M-t)^{n-k}/(M-m)^n\\
&\quad+2B_k(t-m)\sum_{k=1}^{n}\mathrm{C}_{n-1}^{k-1}(t-m)^{k-1}(M-t)^{n-k}/(M-m)^{n-1}\\
&\quad+(t-m)^2\sum_{k=2}^{n}\mathrm{C}_{n-2}^{k-2}(t-m)^{k-2}(M-t)^{n-k}/(M-m)^{n-2}\\
&=\sum_{j=0}^{n}\frac{(n-2)!}{j!\ (n-j)!}(t-m)^j(M-t)^{n-j}\frac{1}{(M-m)^n}\\
&\quad\cdot\{(M-m)^2j(j-1)+2(M-m)j(n-1)B_k+n(n-1)A_k\}.
\end{aligned}$$

由

$$\begin{aligned}
&(M-m)^2j(j-1)+2(M-m)j(n-1)B_k+n(n-1)A_k\\
&=(M-m)^2j^2+[2(M-m)(n-1)B_k-(M-m)^2]j+n(n-1)A_k,
\end{aligned}$$

判别式:

$$\begin{aligned}
\Delta&=[2(M-m)(n-1)B_k-(M-m)^2]^2-4n(n-1)(M-m)^2A_k\\
&\leqslant(M-m)^2\{4(B_k^2-A_k)n^2+(M-m+4\sqrt{A_k})n\}.
\end{aligned}$$

由于

$$\sqrt{A_k}\leqslant|\mathrm{Re}\gamma_k-m|+|\mathrm{Im}\gamma_k|\leqslant 2|\gamma_k|+|m|,$$

当 $n>\dfrac{(8|\gamma_k|+6M_0)^2}{4(A_k-B_k^2)}=\dfrac{[8|\gamma_k|+6M_0]^2}{4|\mathrm{Im}\gamma_k|^2}$ 时有 $\Delta<0$. 此时,对于 $j=0,1,2,\cdots,n$ 都有

$$(M-m)^2j(j-1)+2(M-m)j(n-1)B_k+n(n-1)A_k>0.$$

故当(6.3.1)式成立时,对每个 γ_k 可取 n_k 使得

$$n_k > \frac{[8|\gamma_k| + 6M_0]^2}{4|\operatorname{Im}\gamma_k|^2},$$

且

$$\sum_k n_k + \left\{\prod_i (t-\alpha_i)\prod_j (\beta_j - t)\prod_q (t^2 - 2\operatorname{Re}x_q t + |x_q|^2\right\}$$

的次数$=r$. 从而对每个 γ_k, $t^2-2\operatorname{Re}\gamma_k t+|\gamma_k|^2$ 可表为 n_k 次关于 $t-m$, $M-t$ 的齐次多项式，并且系数为正数，由(a)，(b)，(c)，(d)知，存在正数 $c_s>0$, $s=0,1,\cdots,r$，使得

$$P(t) = \sum_{s=0}^{r} c_s (t-m)(M-t)^{r-s}.$$

故引理 6.3.2 得证. ∎

定理 6.3.1[14]　设实系数多项式

$$P(t_1,\cdots,t_n) = \sum_{|s|=1}^{p} a_{s_1,\cdots,s_n} t_1^{s_1}\cdots t_n^{s_n} \geqslant 0$$

于区域 $\prod_{i=1}^{n}[m_i, M_i]$ 上成立，其中 M_i, m_i 分别是 H 上的 Hermite 有界线性算子 A_i 的上、下确界. 若 $A_iA_j=A_jA_i$, $i,j=1,2,\cdots,n$，则必有 $P(A_1,\cdots,A_n)\geqslant 0$.

证明　(i)　首先设 $P(t_1,\cdots,t_n)>0$, $(t_1,\cdots,t_n)\in \prod_{i=1}^{n}[m_i; M_i]$.

当 $n=1$ 时，由定理 2.4.1 知结论成立. 假设若对 $n-1$ 元多项式定理 6.3.1 成立，我们证明对 n 元多项式 $P(t_1,\cdots,t_n)\in \prod_{i=1}^{n-1}[m_i, M_i]$，$P(t_1,\cdots,t_{n-1},t_n)$ 为 t_n 的多项式(不妨设其最高次数为p). 由引理 6.3.2，当

$$r > p\left\{\max_k \frac{[8|\gamma_k(t_1,\cdots,t_{n-1})| + 6\widetilde{M}_0]^2}{4|\operatorname{Im}\gamma_k(t_1,\cdots,t_{n-1})|^2} + 1\right\}$$

时，存在 $c_s(t_1,\cdots,t_{n-1})>0$ 使得

$$P(t_1,\cdots,t_n) = \sum_{s=0}^{r} c_s(t_1,\cdots,t_{n-1})(t_n-m_n)^s(M_n-t_n)^{r-s},$$

其中 $\gamma_k(t_1,\cdots,t_{n-1})$ 为一切满足 $\mathrm{Re}\gamma_k(t_1,\cdots,t_{n-1})\in[m_n,M_n]$，且 $\mathrm{Im}\gamma_k(t_1,\cdots,t_{n-1})\neq 0$ 的 $P(t_1,\cdots,t_{n-1},z)=0$ 的根(**)，$\widetilde{M}_0=|M_n|+|m_n|$.

我们断言必存在 $\alpha>0$ 使对一切 $(t_1,\cdots,t_{n-1})\in\prod_{i=1}^{n-1}[m_i,M_i]$，均有

$$|\mathrm{Im}\gamma_k(t_1,\cdots,t_{n-1})|\geqslant\alpha>0,$$

其中 $\gamma_k(t_1,\cdots,t_{n-1})$ 是满足(**)的 $P(t_1,\cdots,t_{n-1},z)=0$ 的根. 否则，有 $(t_1^{(l)},\cdots,t_{n-1}^{(l)})$ 使

$$\mathrm{Im}\gamma_{k_l}(t_1^{(l)},\cdots,t_{n-1}^{(l)})\to 0,\ (l\to\infty),$$

并且

$$m_n\leqslant\mathrm{Re}\gamma_{k_l}(t_1^{(l)},\cdots,t_{n-1}^{(l)})\leqslant M_n.$$

不妨设 $(t_1^{(l)},\cdots,t_{n-1}^{(l)})\to(t_1^{(0)},\cdots,t_{n-1}^{(0)})$ 且 $\gamma_{k_l}(t_1^{(l)},\cdots,t_{n-1}^{(l)})\to\beta$ (否则可考虑其子列). 则 $\mathrm{Im}\beta=0$，$m_n\leqslant\mathrm{Re}\beta\leqslant M_n$. 故 $P(t_1^{(0)},\cdots,t_{n-1}^{(0)},z)=0$ 以 β 为根，且 $\beta\in[m_n,M_n]$，矛盾.

其次，因为 $m_n\leqslant\mathrm{Re}\gamma_k(t_1,\cdots,t_{n-1})\leqslant M_n$ 有

$$|\mathrm{Re}\gamma_k(t_1,\cdots,t_{n-1})|\leqslant\widetilde{M}_0,$$

以及

$$\frac{[8|\gamma_k(t_1,\cdots,t_{n-1})|+6\widetilde{M}_0]^2}{4|\mathrm{Im}\gamma_k(t_1,\cdots,t_{n-1})|^2}\leqslant\frac{[14\widetilde{M}_0+8|\mathrm{Im}\gamma_k(t_1,\cdots,t_{n-1})|]^2}{4|\mathrm{Im}\gamma_k(t_1,\cdots,t_{n-1})|^2},$$

所以

$$N\equiv\sup_{\substack{m_i\leqslant t_i\leqslant M_i\\ i=1,2,\cdots,n-1}}p\cdot\max\left\{1+\frac{[8|\gamma_k(t_1,\cdots,t_{n-1})|+6\widetilde{M}_0]^2}{4|\mathrm{Im}\gamma_k(t_1,\cdots,t_{n-1})|^2}\right\}<+\infty.$$

当 $r>N$ 时，存在 $c_s(t_1,\cdots,t_{n-1})>0$，$(s=0,1,2,\cdots,r)$，使

$$P(t_1,\cdots,t_{n-1},t_n)=\sum_{s=0}^{r}c_s(t_1,\cdots,t_{n-1})(t_n-m_n)^s(M_n-t_n)^{r-s},$$

其中 $m_i\leqslant t_i\leqslant M_i$，$i=1,2,\cdots,n$. $t_n\neq M_n$ 时有

$$P(t_1,\cdots,t_n)\left(\frac{1}{M_n-m_n}\right)^r=\sum_{s=0}^{r}c_s(t_1,\cdots,t_{n-1})\left(\frac{t_n-m_n}{M_n-t_n}\right)^s.$$

令 $u=\frac{t_n-m_n}{M_n-t_n}$. 则

$$P\left(t_1,\cdots,t_{n-1},\frac{M_nu+M}{1+u}\right)\left(\frac{1+u}{M_n-m_n}\right)^r$$

$$=\sum_{s=0}^{r}c_s(t_1,\cdots,t_{n-1})u^s.$$

由 $r>p$,知左边为 u 的多项式,且其系数都为 $t_1,\cdots,t_{n-1}$的多项式. 对于 $s=0,1,2,\cdots,r$ 有 $c_s(t_1,\cdots,t_{n-1})$也为 $t_1,\cdots,t_{n-1}$的多项式. 由归纳假设 $c_s(t_1,\cdots,t_{n-1})\geqslant 0$. 再利用引理 6.3.1 知

$$P(A_1,A_2,\cdots,A_n)$$

$$=\sum_{s=0}^{r}c_s(A_1,\cdots,A_{n-1})(A_n-m_nI)^s(M_nI-A_n)^{r-s}\geqslant 0.$$

(ii) 当 $P(t_1,\cdots,t_n)\geqslant 0$ 于 $\prod_{i=1}^{n}[m_i,M_i]$时,取 $\epsilon>0$,则 $P(t_1,\cdots,t_n)+\epsilon>0$ 于 $\prod_{i=1}^{n}[m_i,M_i]$. 由(i)知

$$P(A_1,\cdots,A_n)+\epsilon I\geqslant 0.$$

再令 $\epsilon\to 0$ 得 $P(A_1,\cdots,A_n)\geqslant 0$. 故定理 6.3.1 获证. ▌

有了定理 6.3.1,类似于一元多项式的结果,例如,定理 2.4.2,2.4.3,2.4.4 以及 2.4.5 等,都有相应的推广. 这里仅叙述相应于定理 2.4.5 的结果.

定理 6.3.2[14] 设 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$为 Hilbert 空间 H 上的 Hermite 有界线性算子,且两两可换,A_i 的上、下确界分别为 M_i,$m_i(i=1,2,\cdots,n)$. 用(N_0)表示$\prod_{i=1}^{n}[m_i,M_i]$上所有连续函数及其不减序列的极限函数全体组成的类. 则(N_0)中每一个函数对应于唯一的 Hermite 算子,并且若 $F(t_1,\cdots,t_n)\in(N_0)$且有

$$F(t_1,\cdots,t_n)\geqslant 0,(t_1,\cdots,t_n)\in\prod_{i=1}^{n}[m_i,M_i],$$

则 $F(A_1,\cdots,A_n)\geqslant 0$.

推论 6.3.1 如果 $f(t)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的实值单调增加的连续函数且 A,B 是 Hilbert 空间 H 上两个可交换的 Hermite 有界线性算子，$A\leqslant B$，则

$$f(A)\leqslant f(B).$$

证明 不妨设 $A<B$，令

$$F(t_1,t_2)=(t_2-t_1)(f(t_2)-f(t_1)).$$

则 $F(t_1,t_2)\geqslant 0$，由定理 6.3.2 得 $F(A,B)\geqslant 0$，故 $f(A)\leqslant f(B)$. ▌

设 $P(t_1,\cdots,t_n)=\sum_{|s|=0}^{p}a_s t_1^{s_1}\cdots t_n^{s_n}$ 是 n 元实系数多项式，$A_1,\cdots,A_n$ 是 Hilbert 空间 H 上的两两可交换的 Hermite 有界线性算子；m_i,M_i 分别为 A_i 的下、上确界．若在区域 $\prod_{i=1}^{n}[m_i,M_i]$ 上有 $P(t_1,\cdots,t_n)\geqslant 0$，易知

$$\sum_{|s|=0}^{p}a_s(A_1^{s_1}x,x)(A_2^{s_2}x,x)\cdots(A_n^{s_n}x,x)\geqslant 0. \qquad (6.3.2)$$

下面我们指出当(6.3.2)式成立时，若 $A_i\geqslant 0\,(i=1,2,\cdots,n)$，则有 $P(\|A_1\|,\cdots,\|A_n\|)\geqslant 0$，并且若 $A_1,\cdots,A_{n-1}$ 都为紧算子时，必有

$$P(A_1,\cdots,A_n)\geqslant 0$$

成立．为此先介绍几个引理．

引理 6.3.3 设 A 为 H 上的有界线性算子．

(i) 若 $AA^*=A^*A$，$x_n\in H$，$\|x_n\|\leqslant 1$，并且 $\|Ax_n\|\to\|A\|\,(n\to\infty)$，则

$$\|A^k x_n\|\to\|A^k\|\ (k\geqslant 1,k\in\mathbf{N},n\to\infty).$$

(ii) 若 A 为 Hermite 算子，$A\geqslant 0$，并且当 $\|x_n\|\leqslant 1$，$x_n\in H$ 时，$(Ax_n,x_n)\to\|A\|\,(n\to\infty)$．则对一切自然数 k 有

$$(A^k x_n,x_n)\to\|A\|^k,\ (n\to\infty).$$

证明 我们首先证明下述结果：

(*)：$\| Ax_n \| \to \| A \| (n\to\infty, \| x_n \| \leqslant 1)$蕴涵$\| A^2x_n \| \to \| A \|^2 (n\to\infty)$．事实上，

$$(A^*Ax_n, x_n) \leqslant \| A^*Ax_n \| \leqslant \| A \|^2,$$

从而$\| A^*Ax_n \| \to \| A \|^2 (n\to\infty)$．于是

$$\| A^2x_n \| = (A^2x_n, A^2x_n)^{\frac{1}{2}} = \| A^*Ax_n \| \to \| A \|^2 (n\to\infty).$$

现设对于$k-1$已有

$$\| A^{k-1}x_n \| \to \| A \|^{k-1}, (n\to\infty).$$

我们证明对于k亦有$\| A^kx_n \| \to \| A \|^k, (n\to\infty)$．不妨设$A\neq 0$．令

$$y_n = A^{k-2}x_n / \| A \|^{k-2}.$$

则$\| y_n \| \leqslant 1$且$\| Ay_n \| \to \| A \| (n\to\infty)$．由(*)知$\| A^2y_n \| \to \| A \|^2$，此即$\| A^kx_n \| \to \| A \|^k (n\to\infty)$．故(i)得证．

(ii)可类似(i)证之．故引理6.3.3得证． ▌

定理6.3.3[14]　设$A_1, \cdots, A_n$是H上两两可换的正算子，并且$P(t_1, \cdots, t_n) = \sum\limits_{|s|=0}^{p} a_s t_1^{s_1} \cdots t_n^{s_n}$是实系数多项式．若对任意的$x_i \in H (i=1,2,\cdots,n)$都有

$$\sum_{|s|=0}^{p} a_s (A_1^{s_1}x_1, x_1) \cdots (A_n^{s_n}x_n, x_n) \geqslant 0,$$

则　(i)　$P(\| A_1 \|, \cdots, \| A_n \|) \geqslant 0$；

(ii)　$$-\frac{1}{2}\sum_{|s|=0}^{p} |a_s| \cdot \| A_1 \|^{s_1} \cdots \| A_n \|^{s_n} \leqslant P(A_1, \cdots, A_n).$$

证明　(i)　取$x_k^{(i)} \in H, \| x_k^i \| \leqslant 1$使得

$$(A_i x_k^{(i)}, x_k^{(i)}) \to \| A_i \|, (k\to\infty, i=1,2,\cdots,n).$$

由引理6.3.3知

$$(A_i^{s_i} x_k^{(i)}, x_k^{(i)}) \to \| A_i \|^{s_i}, (n\to\infty).$$

故对于(6.3.2)式两边取极限(以$x_k^{(i)}$代替x_i)，令$k\to\infty$，得$P(\| A_1 \|, \cdots, \| A_n \|) \geqslant 0$.

(ii)　记$\sigma = \{s=(s_1, \cdots, s_n); a_s \geqslant 0\}$．则

$$P(A_1,\cdots,A_n)=\sum_{s\in\sigma}a_sA_1^{s_1}\cdots A_n^{s_n}+\sum_{s\notin\sigma}a_sA_1^{s_1}\cdots A_n^{s_n}$$
$$\geqslant\sum_{s\notin\sigma}a_s\|A_1\|^{s_1}\cdots\|A_n\|^{s_n}I. \qquad (6.3.3)$$

在(6.3.3)式两边都加上$\sum_{s\in\sigma}a_s\|A_1\|^{s_1}\cdots\|A_n\|^{s_n}I$得

$$P(A_1,\cdots,A_n)+\sum_{s\in\sigma}a_s\|A_1\|^{s_1}\cdots\|A_n\|^{s_n}I$$
$$\geqslant P(\|A_1\|,\cdots,\|A_n\|)I\geqslant 0. \qquad (6.3.4)$$

由(6.3.3)及(6.3.4)得

$$2P(A_1,\cdots,A_n)+\sum_{s\in\sigma}a_s\|A_1\|^{s_1}\cdots\|A_n\|^{s_n}I$$
$$\geqslant\sum_{s\notin\sigma}a_s\|A_1\|^{s_1}\cdots\|A_n\|^{s_n}I,$$

即

$$P(A_1,\cdots,A_n)\geqslant-\frac{1}{2}\sum_{|s|=0}^{p}|a_s|\cdot\|A_1\|^{s_1}\cdots\|A_n\|^{s_n}I.$$

定理 6.3.3 证毕． ▌

引理 6.3.4 设$A_1,\cdots,A_n$是可分 Hilbert 空间H上两两可换的 Hermite 有界线性算子．若$\dim(\mathrm{Ker}A_1)<+\infty$且$A_1$为紧算子，则存在一个酉算子$U$使得$U^*A_iU$都为对角算子，其中$i=1,2,\cdots,n$.

证明 在我们的证明中，要用到下面两个事实：

[Ⅰ][79]若A,B是H上两个紧算子，则$m_A=m_B$的充要条件为存在酉算子U使得$U^*AU=B$，其中$m_A(\lambda)=\dim\{\mathrm{Ker}(A-\lambda I)\},\lambda\in\mathbf{C}$.

[Ⅱ] 设$B_1,\cdots,B_n$是H上两两可换的有限秩的 Hermite 算子，则存在酉算子U使得U^*B_iU都为对角算子．

由于A_1为紧算子，则可设$\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$为$A_1$的一切特征值组成的集合，并且$|\lambda_k|\to 0(k\to\infty)$，$\lambda_i\neq\lambda_j(i\neq j)$，以及$\lambda_i$的重数为$n_i$．令$B_1$为如下的准对角算子：

$$B_1=(\text{准})\mathrm{diag}\langle 0I_{n_0},\lambda_1I_{n_1},\cdots,\lambda_iI_{n_i},\cdots\rangle,$$

其中 $n_0=\dim(\mathrm{Ker}A_1)<+\infty$，$I_{n_i}$ 表示 n_i 维空间上的恒等算子．可见 $m_{A_1}=m_{B_1}$．故由[1]存在酉算子 U_1 使得 $U_1^*A_1U_1=B_1$．由于

$$(U_1^*A_1U_1)(U_1^*A_jU_1)=(U_1^*A_jU_1)(U_1^*A_1U_1).$$

则知

$$U_1^*A_jU_1=(\text{准})\mathrm{diag}\langle C_0^{(j)},C_1^{(j)},\cdots,C_n^{(j)},\cdots\rangle.$$

其中 $C_k^{(j)}$ 是有限秩算子，并且

$$C_k^{(i)}C_k^{(j)}=C_k^{(j)}C_k^{(i)},i,j=1,2,\cdots,n,k=0,1,2,\cdots.$$

由[1]存在酉算子 Q_k 使得 $Q_k^*C_k^{(j)}Q_k$ 都为对角算子（$j=2,3,\cdots,n,k=0,1,2,\cdots,$）．令

$$U_2=(\text{准})\mathrm{diag}\langle Q_0,Q_1,\cdots,Q_k,\cdots\rangle \text{及} U=U_1U_2.$$

则 U^*A_jU 都为对角算子，并且 U 为酉算子．故引理 6.3.4 得证． ▍

定理 6.3.5[16] 设 $A_1,\cdots,A_n$ 是可分 Hilbert 空间 H 上两两可换的 Hermite 有界线性算子，且 $A_1,\cdots,A_{n-1}$ 为紧算子．若对 $\forall\ x_i\in H$ 有

$$\sum_{|s|=0}^{p}a_s(A_1^{s_1}x_1,x_1)\cdots(A_n^{s_n}x_n,x_n)\geqslant 0, \tag{6.3.5}$$

其中 $a_s\in\mathbf{R}$，$s=(s_1,\cdots,s_n)$，$|s|=s_1+\cdots+s_n$，$s_i\geqslant 0(i=1,2,\cdots,n)$，则 $\sum_{|s|=0}^{p}a_sA_1^{s_1}\cdots A_n^{s_n}\geqslant 0.$

证明 (i) 设 $\dim(\mathrm{Ker}A_1)<+\infty$．由引理 6.3.4，存在酉算子 U 使得

$$U^*A_iU=\mathrm{diag}\langle\lambda_{i1},\lambda_{i2},\cdots\rangle,(i=1,2,\cdots,n).$$

设 H 的标准正交基为 $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$，则对 $\forall\ y_i\in H$，

$$y_i=\sum_{j=1}^{\infty}y_{ij}e_j;x_i=Uy_i,(i=1,2,\cdots,n),$$

有(6.3.3)式蕴含

$$\sum_{|s|=0}^{p}a_s(U^*A_1^{s_1}Uy_1,y_1)\cdots(U^*A_n^{s_n}Uy_n,y_n)\geqslant 0.$$

即

$$\sum_{|s|=0}^{p} a_s(\lambda_{11}^{s_1}|y_{11}|^2+\cdots+\lambda_{1m}^{s_1}|y_{1m}|^2+\cdots)\cdots(\lambda_{n1}^{s_n}|y_{n1}|^2+\cdots+\lambda_{nm}^{s_n}|y_{nm}|^2$$
$$\leqslant 0.$$

首先，取 $y_{11}=y_{11}, y_{21}=y_{31}=\cdots=y_{n1}=1$，其余 $y_{ij}=0$，则

$$\sum_{|s|=0}^{p} a_s\lambda_{11}^{s_1}\cdots\lambda_{n1}^{s_n}|y_{11}|^2\geqslant 0,$$

同理可适当地选取 y_{ij} 使得

$$\sum_{|s|=0}^{p} a_s\lambda_{1k}^{s_1}\cdots\lambda_{nk}^{s_n}|y_{1k}|^2\geqslant 0, (k\geqslant 2).$$

由此可得

$$\sum_{|s|=0}^{p} a_s(U^* A_1^{s_1}A_2^{s_2}\cdots A_n^{s_n}Uy_1, y_1)$$
$$=\sum_{|s|=0}^{p} a_s(\lambda_{11}^{s_1}\cdots\lambda_{n1}^{s_n}|y_{11}|^2+\cdots+\lambda_{1k}^{s_1}\cdots\lambda_{nk}^{s_n}|y_{1k}|^2+\cdots)$$
$$\geqslant 0,$$

即

$$\sum_{|s|=0}^{p} a_s A_1^{s_1}\cdots A_n^{s_n}\geqslant 0.$$

(ii) $\dim(\mathrm{Ker}A_1)=\infty$. 由 $A_1^*=A_1$，可知

$$H=\mathrm{Ker}A_1\oplus\overline{\mathrm{range}(A_1)}.$$

对于下面的算子

$$A_1|_{\overline{\mathrm{range}(A_1)}},\cdots,A_n|_{\overline{\mathrm{range}(A_1)}},$$

以及 $\forall\ x\in\overline{\mathrm{range}(A_1)}$，我们有

$$\left(\sum_{|s|=0}^{p} a_s A_1^{s_1}\cdots A_n^{s_n}x_1, x\right)\geqslant 0.$$

我们用归纳法可完成定理的证明．若定理对 $n-1$ 个算子成立，则 $\forall\ x\in\mathrm{Ker}A_1$，有

$$\left(\sum_{|s|=0}^{p} a_s A_1^{s_1}\cdots A_n^{s_n}x, x\right)\geqslant 0.$$

再由 $\mathrm{Ker}A_1=(\overline{\mathrm{range}A_1})^{\perp}$ 可知，对任意的 $x\in H$ 有

$$\left(\sum_{|s|=0}^{p} a_s A_1^{s_1}\cdots A_n^{s_n}x_1, x\right)\geqslant 0.$$

故定理 6.3.5 获证. ▌

注记 1 若定理 6.3.5 中条件(6.3.5)换为:

$$\sum_{|s|=0}^{p} a_s (A_1x_1, x_1)^{s_1}\cdots(A_nx_n, x_n)^{s_n}\geqslant 0, \forall\ x_i\in H,$$

则

$$P(t_1,\cdots,t_n)\equiv\sum_{|s|=0}^{p} a_s t_1^{s_1}\cdots t_n^{s_n}\geqslant 0, t_i\in[m_i, M_i].$$

事实上,我们只要利用引理 6.3.5 即可.

引理 6.3.5 设 A 为 H 上的 Hermite 有界线性算子, m, M 分别为 A 的下,上确界,且 $m<M$. 则对$\forall\ t\in(m, M)$存在 $x_0\in H$, $\|x_0\|=1$ 使得$(Ax_0, x_0)=t$.

证明 取 $\epsilon>0$ 使得 $m+\epsilon<t<M-\epsilon$, $x_1, x_2\in H$. 使得 $\|x_1\|=\|x_2\|=1$, $(Ax_1, x_1)\leqslant m+\epsilon$, $M-\epsilon\leqslant(Ax_2, x_2)$. 则 $x_2\neq\delta x_1$($\forall\ \delta\in\mathbf{C}$). 否则$|\delta|=1$ 且

$$M-\epsilon\leqslant(Ax_2, x_2)=(A\delta x_1, \delta x_1)=(Ax_1, x_1)\leqslant m+\epsilon.$$

矛盾. 令

$$f(\lambda)=\left(A\frac{\lambda x_1+(1-\lambda)x_2}{\|\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\|}, \frac{\lambda x_1+(1-\lambda)x_2}{\|\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\|}\right).$$

则 $f(\lambda)$是$[0,1]$上连续函数且 $f(0)=(Ax_2, x_2)$, $f(1)=(Ax_1, x_1)$. 由介值定理存在 $\lambda_0\in[0,1]$使 $f(\lambda_0)=t$. 取 $x_0=[\lambda_0x_1+(1-\lambda_0)x_2]/\|\lambda_0x_1+(1-\lambda_0)x_2\|$ 即可. 故引理 6.3.5 证毕. ▌

注记 2 由$\sum_{|s|=0}^{p} a_s A_1^{s_1}\cdots A_n^{s_n}\geqslant 0$ 未必保证(6.2.3)成立. 例如,取 $H=\mathrm{span}\{e_1, e_2\}$, $e_1\perp e_2$. 令 $A_1: H\to H$ 使得: $A_1e_1=-e_1$, $A_1e_2=0$, 及 $A_2: H\to H$ 使得 $A_2e_1=0$, $A_2e_2=e_2$. 则 $A_1A_2=A_2A_1=0$, 但

$$(A_1e_1, e_1)(A_2e_2, e_2)<0.$$

利用引理 6.3.1 及定理 6.3.1 的证明方法可以得到下面的定理 6.3.6[16].

定理 6.3.6　设 $P(x,y)$ 是二元实系数多项式，并且 $P(x,y)$ 在闭单位圆盘 $\overline{\Delta}$ 上非负，A 为 Hilbert 空间 H 上任一真压缩算子．若 $A^*A=AA^*$，则

$$P(\mathrm{Re}\,A,\mathrm{Im}\,A)\geqslant 0.$$

证明　不妨设 $P(x,y)>0$ 于 $\overline{\Delta}$ 上．对于任一固定的 $y\in(-1,1)$，当 $-\sqrt{1-y^2}\leqslant x\leqslant\sqrt{1-y^2}$ 时，$P(x,y)$ 可表为下面关于 x 的多项式

$$P(x,y)=\sum_{n=0}^{r}c_n(y)(x+\sqrt{1-y^2})^n(\sqrt{1-y^2}-x)^{r-n},$$

其中 $c_n(y)>0$，r 是一自然数满足

$$r>p\max_k\left\{1+\frac{[8|\gamma_k(y)|+12\sqrt{1-y^2}]^2}{4|\mathrm{Im}\,\gamma_k(y)|^2}\right\},$$

p 是 $P(x,y)$ 的最高次数，并且 $\{\gamma_k(y)\}$ 是方程 $P(z,y)=0$ 的一切满足：$\mathrm{Re}\,\gamma_k(y)\in[-\sqrt{1-y^2},\sqrt{1-y^2}]$ 且 $\mathrm{Im}\,\gamma_k(y)\neq 0$ 的根．假若存在一列 $y_n\in(-1,1)$ 使得 $\mathrm{Im}\,\gamma_{k_n}(y_n)\to 0\ (n\to\infty)$，且

$$-\sqrt{1-y_n^2}\leqslant\mathrm{Re}\,\gamma_{k_n}(y_n)\leqslant\sqrt{1-y_n^2}.$$

不妨设 $y_n\to y_0(n\to\infty)$，$\gamma_{k_n}(y_n)\to\beta$．则 $\mathrm{Im}\,\beta=0$，$-\sqrt{1-y_0^2}\leqslant\mathrm{Re}\,\beta\leqslant\sqrt{1-y_0^2}$，且 $P(\beta,y_0)=0$．这与 $P(x,y)>0$ 于 $\overline{\Delta}$ 上矛盾．故有

$$N\equiv\sup_{-1<y<1}p\cdot\max_k\left\{1+\frac{[8|\gamma_k(y)|+12\sqrt{1-y^2}]^2}{4|\mathrm{Im}\,\gamma_k(y)|}\right\}<+\infty.$$

当 $r>N$ 时，对一切 $y\in(-1,1)$，有 $c_n(y)>0$ 使得

$$P(x,y)=\sum_{n=0}^{r}c_n(y)(x+\sqrt{1-y^2})^n(\sqrt{1-y^2}-x)^{r-n},$$

从而

$$P(x,y)\left(\frac{1}{\sqrt{1-y^2}-x}\right)^r=\sum_{n=0}^{r}c_n(y)\left(\frac{x+\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-y^2}-x}\right)^n.$$

令 $u=\dfrac{x+\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-y^2}-x}$．则 $x=\dfrac{\sqrt{1-y^2}(u-1)}{u+1}$，并且

$$P\left(\frac{\sqrt{1-y^2}(u-1)}{u+1},y\right)\left(\frac{1+u}{2\sqrt{1-y^2}}\right)^r=\sum_{n=0}^{r}c_n(y)u^n.$$

由 $r>p$ 知上式左边 u^n 的系数是 y 的连续函数于 $(-1,1)$ 上，故 $c_n(y)$ 是 $(-1,1)$ 上的连续函数，并且 $c_n(y)>0$. 由 $\|A\|<1$, $\|\mathrm{Im}\,A\|\leqslant\|A\|<1$，则 $c_n(\mathrm{Im}\,A)\geqslant 0$. 再由 $I-(\mathrm{Im}\,A)^2\geqslant(\mathrm{Re}\,A)^2$ 可知 $(I-(\mathrm{Im}\,A)^2)^{\frac{1}{2}}\geqslant\pm\mathrm{Re}\,A$. 由 $A^*A=A^*A$ 知 $\mathrm{Re}\,A$ 与 $\mathrm{Im}\,A$ 可换. 从而

$$\begin{aligned}&P(\mathrm{Re}\,A,\mathrm{Im}\,A)\\&=\sum_{n=0}^{r}c_n(\mathrm{Im}\,A)[\mathrm{Re}\,A+(I-(\mathrm{Im}\,A)^2)^{\frac{1}{2}}]^n\\&\quad\cdot[(I-(\mathrm{Im}\,A)^2)^{\frac{1}{2}}-\mathrm{Re}\,A]^{r-n}\end{aligned}$$

为正算子. 故定理 6.3.6 证毕. ▌

推论 6.3.2 若 $f(x,y)$ 是 $\overline{\Delta}$ 上的连续函数，且 $f(\cdot,y)\geqslant 0$，则对 H 上任一正常的真压缩算子 A 有 $f(\mathrm{Re}\,A,\mathrm{Im}\,A)\geqslant 0$.

利用推论 6.3.2 可将函数论中许多不等式直接转化为正常算子不等式.

例 6.3.1 设 $\varphi(z)$ 是单位圆 Δ 内的解析函数且 $|\varphi(z)|<1$. 则有下列 Carathéodory 不等式

$$|\varphi'(z)|\leqslant(1-|\varphi(z)|^2)/(1-|z|^2),\quad z\in\Delta.$$

如果令 $F(x,y)=|\varphi'(z)|(1-|z|^2)-1+|\varphi(z)|^2$, $z=x+iy$. 则 $F(x,y)\leqslant 0$，且 $F(x,y)$ 是 x,y 的连续函数. 于是，利用推论6.3.2，对 H 上任一正常的真压缩算子 A，有 $F(\mathrm{Re}\,A,\mathrm{Im}\,A)\leqslant 0$，即有

$$(\varphi'(A)^*\varphi'(A))^{\frac{1}{2}}(I-A^*A)-I+\varphi(A)^*\varphi(A)\leqslant 0,$$

从而

$$\|\varphi'(A)\|=\|(\varphi'(A)^*\varphi'(A))^{\frac{1}{2}}\|\leqslant\frac{\|I-\varphi(A)^*\varphi(A)\|}{1-\|A\|^2}.\tag{6.3.6}$$

这样，我们就得到了 Carathéodory 不等式的算子化. 这个结

果的直接初等证明可见引理 4.2.2 或[13]，并且在[13]中指出不等式(6.3.6)不能加强为

$$\|\varphi'(A)\|\leqslant\frac{1-\|\varphi(A)\|^2}{1-\|A\|^2}. \qquad (6.3.7)$$

为了说明(6.3.7)式不成立，我们考虑函数

$$\varphi(z)=\frac{1}{\sqrt{5}}(1+z-z^2),z\in\Delta.$$

易见$|\varphi(z)|<1(z\in\Delta)$. 设 H 为 Hilbert 空间，其标准完全正交系为 $e_1,e_2,\cdots,e_n,\cdots$. 定义 H 上的有界算子 $A:H\to H$ 使

$$Ae_1=\frac{2}{3}ie_1,Ae_j=-\frac{2}{3}e_j(j\geqslant 2).$$

易见 $A^*A=AA^*=\frac{4}{9}I$, $\|\varphi(A)\|^2\geqslant\frac{1}{5}\|(I+A-A^2)e_1\|^2=\frac{41}{81}$,
以及

$$\|\varphi'(A)\|(1-\|A\|^2)\geqslant\frac{1}{\sqrt{5}}\|(I-2A)e_2\|\cdot\frac{5}{9}$$

$$=\frac{21\sqrt{5}}{81}>\frac{40}{81}\geqslant 1-\|\varphi(A)\|^2.$$

从而得到与(6.3.7)相反的不等式.

§6.4

多变量分次交换压缩算子函数

为了回答§6.2 最后提出的问题，在这一节我们先对多变量分次压缩算子多项式进行讨论. 如果我们限制多项式为齐次多项式，那么我们只须考虑分次压缩算子齐次多项式的情形，而对于 J 个变量的一般多项式，其讨论可由 $J+1$ 个变量的齐次多项式的讨论得到. 在此基础上我们将给出多变量分次可交换压缩算子函

数的 von Neumann 定理.

定义 6.4.1 设$\{H_n; n\in \mathbf{Z}^+$或$\mathbf{Z}\}$为正交的 Hilbert 空间序列. Hilbert 空间 H 称为分次 Hilbert 空间,如果 H 是$\{H_n\}$的正交直和,即 $H=\bigoplus\limits_n H_n$. H 上的一个算子 T 是分次的,如果对于所有 n, $T(H_n)\subseteq H_{n+1}$.

对于 J 个变量的多项式 P 定义其 von Neumann 范数:

$$\|P\|_{vN}=\sup\|P(T_1,\cdots,T_J)\|, \tag{6.4.1}$$

其中"sup"遍取复 Hilbert 空间上所有 J 个可交换压缩算子 T_1, $\cdots$, T_J.

根据定义 6.4.1,我们有下面的命题.

命题 6.4.1 设 P 是齐次多项式,则

$$\|P\|_{vN}=\sup\|P(T_1,\cdots,T_J)\|, \tag{6.4.2}$$

其中"sup"遍取复 Hilbert 空间上所有 J 个可交换分次压缩算子 $T_1,\cdots,T_J$.

证明 设 $T_1,\cdots,T_J$ 为复 Hilbert 空间 K 上任意 J 个可交换压缩算子. 对于 n, 令 $H_n=K$,并且 $T_j^{(n)}=T_j$ 看作是 $H_n\to H_{n+1}$的一个映射. 则$\widetilde{T}_j=\bigoplus\limits_n T_j^{(n)}$是可交换分次压缩算子. 如果 P 是次数为 d 的齐次多项式,则 $P(\widetilde{T}_j,\cdots,\widetilde{T}_J)$限制在 H_n 上时,可看作是 H_n 到 H_{n+d}的一个映射. 因为 $H=\bigoplus\limits_n H_n$ 是一正交直和,所以

$$\|P(T_1,\cdots,T_J)\|=\|P(\widetilde{T}_1,\cdots,\widetilde{T}_J)\|.$$

从而命题得证. ▌

下面我们给出一种相当具体的情形,并且以后作为一个标准框架. 算子 T_j 取为独立的交换位移算子. 对于每个多重指标 $a=(a_1,\cdots,a_J)$,其中 $a_j\in\mathbf{Z}^+$,构成一个基本元 e_a. 令 $e_a=T^a e_0$,其中 0 是零多重指标,并且 $T^a=T_1^{a_1}\cdots T_J^{a_J}$. 设 H_n 为$\{e_a, |a|=n\}$的线性扩张,即

$$H_n=\mathrm{span}\{e_a; |a|=n\},$$

其中$|a|=\sum_{j=1}^{J}a_j$为指标a的长度．则T_j是$H=\bigoplus_{n\in Z^+}H_n$上的分次可换算子，由此，我们定义$H$上的一个（可能是退化的）几何：对于上面定义的$H_n$有一预内积$\langle\cdot,\cdot\rangle_n$使得每个$T_j$是压缩算子，即

$$\langle x,x\rangle_n-\langle T_jx,T_jx\rangle\geqslant 0,\forall\ x\in H_n,\forall\ j,$$

且$\langle e_0,e_0\rangle=1$.

命题 6.4.2 设P是次数为d的齐次多项式．则

$$\|P\|_{vN}=\sup\left(\langle\sum P_ae_a,\sum P_ae_a\rangle_d\right)^{\frac{1}{2}},\qquad(6.4.3)$$

其中"sup"取所有可能的几何．

证明： 假设$T_1,\cdots,T_J$是$K=\oplus K_n$上的J个变量可交换分次压缩算子．则

$$\|P(T_1,\cdots,T_J)\|=\sup_{\|e\|\leqslant 1}\|P(T_1,\cdots,T_J)e\|_K.$$

因为$K=\oplus K_n$是正交的，所以我们只需考虑e在K的一个"位级"的情形．因此，不失一般性设$e\in K_0$．我们定义$e_a=T^ae$，并且K_n上的预内积为$\langle\cdot,\cdot\rangle_n$：

$$\langle e_a,e_b\rangle_n=\langle T^ae,T^be\rangle_K.$$

容易验证下面等式成立：

$$\|P(T_1,\cdots,T_J)\|_K=\left(\langle\sum P_ae_a,\sum P_ae_a\rangle_d\right)^{\frac{1}{2}}.$$

从而

$$\|P\|_{vN}\leqslant\sup\left(\langle\sum P_ae_a,\sum P_ae_a\rangle_d\right)^{\frac{1}{2}}.\qquad(6.4.4)$$

另一方面，要证明其相反不等式，我们只须扰动几何：

$$(1+\varepsilon)\langle e_a,e_b\rangle_n^{new}=\langle e_a,e_b\rangle_n^{old}+\varepsilon\delta_{a,b},(\varepsilon>0),$$

使得H为真分次 Hilbert 空间．则

$$\langle\sum P_ae_a,\sum P_ae_a\rangle_d^{old}+\varepsilon\sum|P_a|^2\leqslant(1+\varepsilon)\|P\|_{vN}^2.$$

令$\varepsilon\to 0$得(6.4.4)的相反不等式．故(6.4.3)式成立．

定义 6.4.2[42] 设$H=\bigoplus_{n\in Z^+}H_n$为单边分次预 Hilbert 空间，

并且有分次压缩算子 $T_j(1\leqslant j\leqslant J)$ 使

$$H_0\xrightarrow{H_j}H_1\xrightarrow{J_1}H_2\xrightarrow{J_j}H_3\to\cdots.$$

一个预内积的扩张是指在 $H_1,H_2,\cdots$ 上定义一个比已给预内积更大的新的预内积使得 T_j 在新的预内积下仍然是压缩算子(并且在无穷维情形 H_n 是完全的). 一个最大扩张是指此预内积不能再被扩张. 我们也称此为最大几何.

最大准则 设 V,W 是两个有限维预内积空间,并且 $T_j:V\to W(1\leqslant j\leqslant J)$ 是线性压缩算子. 则 K_j:

$$\begin{aligned}K_j&=\{v;v\in V,\langle T_jv,T_jv\rangle_W=\langle v,v\rangle_v\}\\&=\{v_1;v_1\in V,\langle T_jv_1,T_jv_2\rangle_W=\langle v_1,v_2\rangle_V,\forall\ v_2\in V\}\end{aligned}$$

是 T_j 的等距子空间,并且 W 上的一预内积是最大的当且仅当 $\bigcup_{j=1}^J T_j(K_j)$ 张成 W.

证明 设 $\xi\in W^*,\xi\neq0$. 我们设法利用

$$(w_1,w_2)\to\langle w_1,w_2\rangle_W+t\xi(w_1)\overline{\xi(w_2)}\qquad(6.4.5)$$

替代 W 上的预内积,其中 t 为某一正数. 由最大性,至少存在一个 $j(1\leqslant j\leqslant J)$ 使得 T_j 不再是压缩算子,即

$$\langle V_1,v_2\rangle_v-\langle T_jv_1,T_jv_2\rangle_w-t\xi(T_jv_1)\overline{\xi(T_jv_2)}$$

不是非负定的. 设 τ_j 是对应于

$$\langle v_1,v_2\rangle\to\langle v_1,v_2\rangle_V-\langle T_jv_1,T_jv_2\rangle_W$$

的 τ-函数. 则 $\min\tau_j(\xi\circ T_j)=0$. 所以存在 j 使得 $\xi\circ T_j\notin K_j$,或者等价地,$\xi\notin[T_j(K_j)]^\circ$. 因此,由对偶性知 $\bigcup_{j=1}^J T_j(K_j)$ 张成 W.

反之,如果不具最大性,则存在 W 上如(6.4.5)式定义的压缩算子. 因此,$\min\tau_j(\xi\circ T_j)>0$ 并且 ξ 零化所有 $T_j(K_j)$ 矛盾. ▌

由最大准则可得下面的推论,其证明见[42].

推论 设 V,W 是两个有限维预内积空间,并且 $T_j:V\to W(1\leqslant j\leqslant J)$ 是线性压缩算子. 如果 $W=\mathrm{span}\{\bigcup_{j=1}^J T_j(V)\}$,则存在 W 上"新的"最大预内积强于"旧的"预内积.

定理 6.4.1 设 $H=\bigoplus\limits_{n\in\mathbf{Z}^+}H_n$ 是具有分次压缩算子 T_j 的单边

分次预 Hilbert 空间．假设对于所有 $n\in\mathbf{Z}^+$，$\dim(H_n)<\infty$ 并且 $H_{n+1}=\operatorname{span}\{\bigcup_{j=1}^{J}T_j(H_n)\}$．则最大扩张存在．

证明 连续应用推论到不同的位级 $H_n\to H_{n+1}$，$n=0,1,2,\cdots$． ▌

定理 6.4.2 设 $J=2$，并且最大几何为标准框架意义下的．则 T_1 与 T_2 是等距的．

证明 关于位级进行归纳．设 $K_{n,j}$ 为 K_n 内 T_j 的等距子空间．由最大性，

$$H_1=\operatorname{span}(T_1(K_{0,1})\cup T_2(K_{0,2})).$$

但 $H_1=T_1(H_0)\oplus T_2(H_0)$（只是线性直和），所以 T_1 和 T_2 在 H_0 上必是等距的．假设它们在 H_n 上也是等距的，我们证明 T_1 在 H_{n+1} 上是等距的．同时也证明了 T_2 在 H_{n+1} 上也是等距的．

设 $\xi\in H_{n+1}$．则由最大准则

$$T_1\xi=T_1\xi_1+T_2\xi_2,$$

其中 $\xi_j\in K_{n+1,j}$，即 $T_1(\xi-\xi_1)=T_2\xi_2$．于是，由 T_1 和 T_2 是独立的位移，则存在 $\eta\in H_n$ 使其 $\xi-\xi_1=T_2\eta$ 且 $\xi_2=T_1\eta$．因此，由 $\xi_2\in K_{n+1,2}$，我们有

$$\langle T_1T_2\eta,T_1T_2\eta\rangle=\langle T_2\xi_2,T_2\xi_2\rangle=\langle\xi_1,\xi_2\rangle.$$

另一方面，由于 $\eta\in K_{n,1}$，以及归纳假设，我们得

$$\langle\xi_2,\xi_2\rangle=\langle T_1\eta,T_1\eta\rangle=\langle\eta,\eta\rangle.$$

又由 $\eta\in K_{n,2}$，以及归纳假设，我们得

$$\langle\eta,\eta\rangle=\langle T_2\eta,T_2\eta\rangle.$$

因此，$T_2\eta\in K_{n+1,1}$．从而 $\xi=\xi_1+T_2\eta\in K_{n+1,1}$．但 $\xi\in H_{n+1}$ 为任意的，所以 T_1 在 H_{n+1} 上是等距的．故定理 6.4.2 证毕． ▌

一个几何称为是等距的，如果算子 $T_1,\cdots,T_J$ 均为等距的．

定理 6.4.3 对于一个等距几何，我们有

$$\|P(T_1,\cdots,T_J)\|\leqslant\sup|P(z_1,\cdots,z_J)|. \tag{6.4.6}$$

证明 因为 T^c 是等距的，所以 $\langle e_{a+c},e_{b+c}\rangle=\langle e_a,e_b\rangle$．则 $\langle e_a,e_b\rangle$

是关于 $a-b$ 的函数．设 G 是由多重指数 $(a_1,\cdots,a_J)$ 构成的可加群，其中 $a_j\in\mathbf{Z}$ 且 $\sum_{j=1}^{J}a_j=0$. 则在 G 上存在函数 φ 使得

$$\varphi(a-b)=\langle e_a,e_b\rangle_d,$$

其中 $a,b\in\Phi_d=\{(a_1,\cdots,a_J);a_j\in\mathbf{Z}^+,\sum_{j=1}^{J}a_j=d\}$. 很明显，$\varphi$ 是 G 上的正定函数．事实上，如果 F 是 G 的有限子集，选取 c 使得对所有 $a\in F$ 和 $j(1\leqslant j\leqslant J)$，均有 $a_j+c_j\geqslant 0$. 则对于 $d=|c|$, $F+c\subseteq\Phi_d$，从而

$$\sum_{a,b\in F}\alpha_a\bar{\alpha}_b\varphi(a-b)=\sum_{a,b\in F}\alpha_a\bar{\alpha}_b\langle e_{a+c},e_{b+c}\rangle_d\geqslant 0.$$

由 Bochner 定理，则 $\varphi(a)=\hat{\mu}(a)$，其中 μ 是 $\hat{G}$ 上的一正测度．显然，

$$\|\mu\|_M=\hat{\mu}(0)=\varphi(0)=\langle e_0,e_0\rangle=1.$$

于是

$$\begin{aligned}\langle\sum P_a e_a,\sum P_b e_b\rangle_d&=\sum_{a,b}P_a\overline{P}_b\hat{\mu}(a-b)\\&=\int_{\hat{G}}|P(z)|^2d\mu(z)\\&\leqslant\|P\|_\infty^2.\end{aligned}$$

因为 G 是 $\mathbf{Z}^J$ 的子群，所以 $\hat{G}$ 是 $\mathbf{T}^J$ 的商．由于 P 是 $\mathbf{T}^J$ 的齐次多项式．因此，$|P|^2$ 可作为另一函数的提升，同时 $|P|^2$ 也是 $\hat{G}$ 上的函数．故定理 6.4.3 得证． ▌

利用命题 6.4.2，定理 6.4.2 以及定理 6.4.3，我们有下面的推论．

推论 6.4.1 如果 P 是齐次多项式，则对于 H 上的一对可换压缩算子 T_1,T_2，我们有不等式

$$\|p(T_1,T_2)\|\leqslant\sup_{\substack{|z_1|\leqslant 1\\|z_2|\leqslant 1}}|P(z_1,z_2)|.$$

下面，我们给出一个更一般的结果．由于证明较长，此处略

去，读者可参见[42].

定理 6.4.4　假设 $T_j(1\leqslant j\leqslant J)$ 在位级 $T_j: H_n\to H_{n+1}(0\leqslant n\leqslant d-1)$ 上是等距的．则对于所有 d 次齐次多项式 P 均有

$$\| P(T_1,\cdots,T_J)\| \leqslant c_J \sup_{D^J} |P(z_1,\cdots,z_J)|.$$

我们已建立了两个交换压缩算子函数的 von Neumann 定理（定理 6.2.1）．但对于三个或更多个交换压缩算子函数该定理不成立．由 Crabb 和 Davie[40]给出的例子容易验证．设 $J=3$，H 是 8 维空间，其基为：

$$e, f_1, f_2, f_3, g_1, g_2, g_3, h.$$

定义算子如下：

$$T_i e=f_i, T_i f_i=-g_i, (i=1,2,3),$$

$$T_i f_j=g_k, (i,j,k \text{ 不同}),$$

$$T_i g_j=\delta_{ij} h, T_i h=0.$$

易知 T_1, T_2, T_3 是可交换压缩算子，并且

$$T_1^3=T_2^3=T_3^3=-T_1T_2T_3 \tag{6.4.7}$$

是范数为 1 的算子．设

$$p(z_1,z_2,z_3)=z_1^3+z_2^3+z_3^3-3z_1z_2z_3. \tag{6.4.8}$$

从而，由(6.4.8)及(6.4.7)式可得：

$$\begin{aligned} p(T_1,T_2,T_3)&=T_1^3+T_2^3+T_3^3-3T_1T_2T_3\\ &=6T_1^3. \end{aligned}$$

因此，我们得

$$\| p(T_1,T_2,T_3)\|_{\rm op}=6.$$

显然，$\| p\|_\infty\leqslant 6$，并且如果 $\| p\|_\infty=6$，则存在模为 1 的复数 z_1，z_2，z_3 使得

$$z_1^3=z_2^3=z_3^3=-z_1z_2z_3.$$

由此可得

$$(-z_1z_2z_3)^3=z_1^3z_2^3z_3^3,$$

即得 $-1=1$．矛盾．故 $\| p\|_\infty<6$．由此得到

$$\| p(T_1,T_2,T_3) \| > \| p \|_\infty,$$

从而定理 6.2.1 不成立(关于 $J=3$ 的情形).

利用上面的讨论以及定理 6.4.3,我们有如下定理.

定理 6.4.5　设 f 是 Δ 上 $J(J\geqslant 3)$ 个变量的解析函数,并且对于 $z=(z_1,\cdots,z_J)\in\overline{\Delta}$, $|f(z_1,\cdots,z_J)|\leqslant 1$. 则对于一个等距几何,我们有

$$\| f(T_1,\cdots,T_J) \| \leqslant 1. \tag{6.4.9}$$

证明　因为 $f\in H(\Delta)$,所以有幂级数展开式

$$f(z)=\sum_{v_1,\cdots,v_J=0}^{\infty} a_{v_1\cdots v_J} z_1^{v_1}\cdots z_J^{v_J},\ z\in\Delta.$$

于是,由性质 6.1.2,我们得

$$f(T)=\sum_{v_1,\cdots,v_J=0}^{\infty} a_{v_1\cdots v_J} T_1^{v_1}\cdots T_J^{v_J},$$

其中 $T_1,\cdots,T_J$ 为等距的. 令

$$S_n(z)=\sum_{v_1,\cdots,v_J=0}^{n} z_{v_1\cdots v_J} z_1^{v_1}\cdots z_J^{v_J},$$

其中 $n=(n_1,\cdots,n_J)\in\mathbf{N}^J$. 则

$$S_n(T)=\sum_{v_1,\cdots,v_J=0}^{n} a_{v_1\cdots v_J} T_1^{v_1}\cdots T_J^{v_J}. \tag{6.4.10}$$

另一方面,由于 J 个变量的一般多项式的运算结果可由 $J+1$ 个变量的齐次多项式的结果得到. 于是,由(6.4.10),不等式(6.4.6)对于一般多项式同样成立. 于是,由(6.4.10),我们得

$$\| S_n(T) \| \leqslant \sup_{\overline{\Delta}} |S_n(z_1,\cdots,z_J)|.$$

令 $n\to+\infty$,即 $n_j\to+\infty\ (1\leqslant j\leqslant J)$,则得

$$\| f(T_1,\cdots,T_J) \| \leqslant \sup_{\overline{\Delta}} |f(z_1,\cdots,z_J)| \leqslant 1,$$

即(6.4.9)式成立. ▌

定理 6.4.6　设 f 是 Δ 上 $J(J\geqslant 3)$ 个变量的解析函数. 对于 $0\leqslant r\leqslant 1$,设

$$M(r)=\max_{|z|=r} |f(z)|,\ z=(z_1,\cdots,z_J)\in\Delta.$$

则

$$M(r)=\max\|f(T_1,\cdots,T_J)\|,0\leqslant r\leqslant 1,$$

其中"max"取所有可能的等距几何．

定理 6.4.7 设 $f,g,h\in H(\Delta)$ 有 $f=gh$，并且对所有 $z=(z_1,\cdots,z_J)\in\overline{\Delta}$，$(J\geqslant 3)$，$|h(z)|\leqslant 1$. 则对任一等距几何，我们有

$$g(T)^*g(T)\geqslant f(T)^*f(T),$$

$$\|g(T)\|\geqslant\|f(T)\|.$$

定理 6.4.8 设 f 是 Δ 的某一邻域内的解析函数，并且 f 在 $z=0$ 处的全阶为 k，以及对于所有 $z=(z_1,\cdots,z_J)\in\overline{\Delta}$，$(J\geqslant 3)$，$|f(z)|\leqslant 1$. 则对任一等距几何，我们有

$$\|f(T_1,\cdots,T_J)\|\leqslant\|T\|^k.$$

定理 6.4.6，6.4.7 以及 6.4.8 的证明分别与定理 6.3.2，6.3.3 以及 6.3.4 的证明类似．在此不再重述．

索 引

参 考 文 献

1 李国平. 半纯函数的聚值线理论. 北京：科学出版社，1957

2 李国平，郭友中，陈银通. 自守函数与闵可夫斯基函数. 科学出版社，1979

3 李国平，刘怀俊，邱华吉. 近代函数论. 武汉大学出版社，1983

4 李国平，蔡海涛. 准解析函数论. 武汉大学出版社，1984

5 蹇明. 算子解析函数的优势原理和性质. 数学物理学报，1992，12（2）

6 Jian Ming（蹇明）. Certain subclass of analytic p-valent functions for oper ators on Hilbert space. Acta Math. Sci.，1994，14（3）：338～347

7 Jian Ming（蹇明）. On the class $\Phi_p^*(\alpha,\beta,\gamma,\varepsilon,\eta)$ of p-valent functions with reference to the Bernardi integral opertaor，Acta Math. Sci.，1994，14（4）：371～376

8 Jian Ming（蹇明）. A subclass of operator-valued analytic functions with negative operator coifficients. Banach Spaces Theory & Its Applications. Wuhan：Wuhan Univ. Press，1996：83～86

9 蹇明. An extremal property of analytic operator functions，数学杂志，1995，16(1)：47～54

10 蹇明. 两个交换压缩算子的全纯函数. 武汉工业大学学报

(增刊)，1995，17：123～127

11 Jian Ming (蹇明). Analytic Functions for One or More Operators on Hilbert space：博士学位论文. 武汉：武汉大学，1993

12 蹇明，杨长森. 具有负算子系数的算子值解析函数的变形定理. 武汉：武汉工业大学学报，1995，17 (1)：121～123

13 杨长森. 函数论中的某些不等式的算子化. 数学物理学报，1992，12 (2)：167～171

14 杨长森. 多元算子多项式. 数学物理学报，1993，13 (2)：167～171

15 Yang changsen (杨长森). A generalization of Carathéodory inequality. Acta Math. Sci.，1994，14(2)：235～239

16 杨长森. 算子多项式的若干问题. 数学物理学报，1995，15 (2)

17 Yu Xiaopei (喻小培)，A subclass of analytic p-valent functions for operators on Hilbert space. Math. Japon.，1994，40 (2)：303～308

18 喻小培. A subclass of operator-valued analytic functions on Hilbert space. 华中师范大学学报（自然科学版），1994，28 (3)：290～295

19 Yu xiaopei (喻小培)，Jian Ming (蹇明). Mean value of analytic operator functions. Acta Math. Sci.，1995，15 (4)

20 刘培德. 泛函分析基础. 武汉：武汉大学出版社，1992

21 Ahlfors L V. An extension of Schwarz's lemma. Trans. Amer. Math. Soc.，1938，43

22 Ando T. On apair of commutative contractions. Amer. Sci. Math.，1963，24：88～90

23 Ando T，Fan K. Pick-Julia theorems for operator. Math. Z.，

1979, 168: 23~34

24 Aouf M K. On certain subclass of analytic p-valent functions II. Math. Japon., 1989, 34 (5): 683~691

25 Aouf M K, Nunokawa M. On a certain class of starlike functions. Math. Japon., 1991, 36(2): 351~362

26 Aouf M K, Obradoric M. Owa S, On certain class of p-valent functions with reference to the Bernardi integrral operator. Math. Japon., 1990, 35(5): 839~848

27 Bajpai S D, Srivastava S L. On the radius of convexity and starlikeness of univalent functions. Proc. Amer. Math. Soc., 1972, 32: 153~163

28 Bernardi S D. Convex and starlike univalent functions. Tran. Amer. Math. Soc., 1969, 135: 429~446

29 Bonsall F F, Duncan J. Complete Normed Algebras. Springer-Verlag, New York, 1973

30 De Branges L. The invariant subspace problem Integral Equations and Operator Theory. 1983, 6: 489~505

31 De Branges L. The comparison theorem for Hilbert spaces of entire functions. Integral Equations and Operator Theory, 1983, 6: 603~646

32 Brickman L, MacGregor T H, Wilken D R. Convex hulls of some classical families of univalent functions. Trans. Amer. Math. Soc., 1971, 156: 91~107

33 Burckel R B. Iterating analytic self-maps of discs. Amer. Math. Monthly, 1981, 88: 396~407

34 Burckel R B. An introduction to classical complex analysis. I. Birkhauser Ver lag, Basel-Stuttgart, 1979

35 Capri O N, Dominguez A G. On operator-valued analytic

functions with positive real part whose logarithm belongs to a C_p class. Studia Math., 1983, 77: 183～196

36 Carathéodory C. Theory of Functions, II. New York, 1954

37 Chen G-N. Iteration for holomorphic maps of the open unit ball and the generalize upper half-plane of $\mathbf{C}^n$. J. Math. Anal. Appl., 1984, 90: 305～313

38 Clunie J, Keogh F R. On starlike and convex schlicht functions. J. London Math. Soc., 1960, 35: 229～233.

39 Conway J B. Subnormal Operators. Boston, 1981

40 Crabb M J, Davie A M. von Neumann's inequality for Hilbert space operators. Bull. London Math. soc., 1975, 7: 49～50

41 Doob J L. The ranges of analytic functions. Ann. of Math. 1935, 36: 117～126

42 Drury S W. Several graded contrctions on Hilbert space. Linear Algebra Appl., 1990, 142: 23～41

43 Drury S W. Remarks on von Neumann's inequality. In Proceedings of the Conference on Banach Space, Harmonic Analysis and Probability Theory; Univ. of Connecticut, 1980-1981, LNM., Springer-Verlag, 1983, 995: 14～32

44 Dunford N. Spectral theory I, Convergence to projections. Trans. Amer. Math. Soc., 1943, 54: 185～217

45 Dunford N, Schwartz J T. Linear Operators, Part I: General Theory. New York-London: Interscience, 1958

46 Dunford N, Schwartz J T. Linear Operators, Part II: Spectral Theory, Self-Adjoint Operators in Hilbert Space. New York-London: Interscience, 1963

47 Earle C J, Hamilton R S. A fixed point theorem for holo-

morphic mapping, Global Aanalysis. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1970, 61～65

48 Esterle J, Strouse E, Zouakia F. Theorems of Katznelson-Tzafriri type for contractions. J. Funct. Anal., 1990, 94: 273～287

49 Fan K. Analytic functions of a proper contraction. Math. Z., 1978, 160: 275～290

50 Fan K. Julia's lemma for operators. Math. Ann., 1979, 239: 241～245

51 Fan K. Harnack's inequalities for operators, Birkhauser Basel, In "General Inqualities 2., Proceedings 2nd. International Conference on General Inequalities" (E. F. Beckenbach, Ed.), 1980: 333～339

52 Fan K. Iteration of analytic functions of operators. Math. Z., 1982, 179: 293～298

53 Fan K. Iteration of analytic functions of operators II. Linear and Multilinear Algebra, 1983, 12: 295～304

54 Fan K. The angular derivative of an operator-valuedanalytic function. Pacific J. Math., 1986, 121(1): 67～72

55 Fan K. Sharpened forms of an Inequality of von Neumann. Math. Z., 1987, 194: 7～13

56 Fantappie L. Le calcul des matrices. Paris: C. R. Acad. Sci., 1928, 186: 619～621

57 Frobenius G. Uber die congredienten transformationen der bilinearen formen. Sitzungsber ichte der K. Preuss. Akad. der Wiss. zu Berlin, 1896

58 Garnell J B. Bounded Analytic Functions. Academic Press, 1981

59 Gelfand I M. Normierte ringe. Mat. Sbornik N. S., 1941, 51(9)

60 Giorge G. Nuove osservazioni sulle funzioni delle matrici. Atti Accad. No. 2, Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat., 1928, 8(6)

61 Glicksberg I. Julia's lemma for function algebras. Duke Math. J., 1976, 43: 277～284

62 Govil N K, Jain V K. On the Enestrom-Kakeya theorem. II, J. Appr. Theory, 1978, 22: 1～10

63 Grauert H, Fritzsche K. Several Complex Variables. GTM, **38**, Springer-Verlag, 1976

64 Gunning R C. Rossi H Analytic Functions of Several Complex Variable. Prentice-Hall series in Modern Analysis (Buck R C Ed.), 1965

65 Halmos P R. A Hilbert Space Problem Book. Princetion Van Nostrand, 1967

66 Harris L A. Schwarz's lema in normed linear spaces. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 1969, 62: 1014～1017

67 Heinz E, Ein v. neumannscher Satz uber beschankte Operatoren in Hilbertschen Raum. Nachr. Akad. Wiss. Gottingen Math.-Phys., K1. 1952, II: 5～6

68 Hille H. Analytic Hunction Theory II. Boston: Ginnyr, 1962

69 Hille H. Notes on linear transformations, II. Analyticaty of semi—group. Ann. of Math., 1939, 40(2)

70 Hille H. Analytic Function Theory II Ginn., waltham, Mass., 1962

71 Hille H, Phillips R S. Functional Analysis and Semigroups.

Rev. Ed. Amer. Math. Soc. Providence, R. I., 1957

72 Holland F. The extreme points of a class of functions with positive real part, Math. Ann., 1973, 202: 85～87

73 Hua L K. Inequalities involving determinants. Amer. Math. Soc. Trans., 1963, 32(2): 265～272

74 Hwang J S. On an extremed property of Doob's class. Trans. Amer. Math. Soc., 1979, 252: 393～398

75 Hwang J S. On the ranges of analytic functions. Trans. Amer. Math. Soc., 1980, 260: 623～629.

76 Hwang J S. On an estimate for Bloch and Doob norm and covering problem in Doob's class. J. Math. Appl., 1983, 91: 434～443

77 Hwang J S. On the operator ranges of analytic functions. Proc. Amer. Math. Soc., 1983, 87(1): 90～94

78 Hwang J S, Rung D C. An improved estimate for the Bloch norm of functions in Doob's class. Proc. Amer. Math. Soc., 1980, 80: 406～410

79 John B C. A Course in Functional Analysis. GTM, 1985, 96

80 Julia G. Princips geometriques d'analyse, Premiere Partie, Pairs: Gauthier-Villars, 1930

81 Juneja O P, Mogra M L. Radius of convexity for certain classes of analytic functions. Pacific J. Math., 1978, 78: 359～368

82 Kapoor G P, Mishra A L. Distortion theorems for some classes of analytic functions. Houston J. Math., 1980, 8: 85～92

83 Kothe F. Topological vector spaces I. Berlin-Heidelberg-

New York: Springer, 1969
84 Landau E, Valiron G. A deduction from Schwarz's lemma. J. London Math. Soc., 1929, 4: 162~163
85 Lee S H, Kim Y C, Cho N. A subclass of analytic functions with negative coefficients. Math. Japon., 1989, 34(4): 597·~605
86 Lehto O, Virtanen K J. Boundary behaviour and normal meromorphic functions. Acta Math., 1957, 97: 47~65
87 Lorch E R. The spectrum of linear transformation. Trans. Amer. Math. Soc., 1942, 52: 238~248
88 Miroslav P. Mean values of harmonic conjugates in the unit disc. Complex Variables, 1988, 10: 53~65
89 Mishra A K. Some applications of Schwarz lemma for operators. Internat. J. Math. & Math. Sci., 1989, 12(2): 349~354
90 Michael R, Barry S. Methods of Modern Mathematical Physics I: Functional Analysis. New York and London: Academic Press, 1972
91 Nagumo M. Einige analytische antersuchungen in linearen metrischen ringen. Jap. J. Math., 1936, 13: 61~80
92 Nehari Z. Conformal Mapping. New York: McGraw-Hill Book Co. Inc., 1952
93 Neumann von J. Eine Spektraltheorie fur allgemeine Operatoren eines unitaren Raumes. Math. Nachr., 1950\1951, 4: 258~281
94 Padmanabhan K S. On certain classes of starlike functions in unit disc. J. Indian Math. Soc., 1968, 32: 89~103
95 Pearcy C. An elementary proof of the power ineqality for

the numerical radius. Michigan Math. J., 1966, 13: 289~291

96 Phillips R S. On symplectic mapings of contyaction operators, Studia Math., 1968, 31: 15~27

97 Pietsch A. Operator Ideals. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1978

98 Poincare H. Sur les groups continus. Cambridge Phil. Trans., 1899, 18: 220~255

99 Pommerenke C. On Bloch functions. J. London Math. Soc., 1970, 21: 689~695

100 Pommerenke C. Univalent functions. Gottingen: Vandenhoeck-Ruprecht, 1975

101 Potapov V P. The multiplicative structure of J-contractive matrix functions. Trans. Amer. Math. Soc., 1960, 15: 131~243

102 Reddy L G, Padmanabhan K S. On analytic functions with reference to the Bernardi integral operator. Bull. Austral. Math. Soc., 1982, 25: 387~396

103 Richter S. A representation theorem for cyclic analytic twe-isometries. Trans. Amer. Math. Soc., 1991, 328 (1): 325~349

104 Riesz F, Sz-Nagy B. Functional Analysis. New York: Ungar, 1960

105 Rudin W. Functional Analysis. New York: McGraw-Hill, 1973 (中译本)

106 Schaefer H H. Topological vector spaces. Berlin-Heidelberg-New York: Springer, 1971

107 Shih M-H. Fixed points for mappings majorized by real

functions. Hokkaido Math. J., 1980, 9: 18～35

108 Shih M-H. Fixed points for mappings majorized by real functions. Hokkaido math. J., 1980, 35(9): 18—35

109 Shih M-H, Tan K-K. Analytic functions of topological proper contractions. Math. Z., 1984, 187: 317～323

110 Siegel C L. Symplectic geometry. Amer. J. Math., 1943, 65: 1～86

111 Silverman H. Extreme points of univalent functions with two fixed points. Trans. Amer. Math. Soc., 1976, 219: 387～395

112 Stein P. Some general theorems on iterants. J. Res. Nat. Bur. Standards, 1952, 48: 82～83

113 Sz-Nagy B, Foicas C. On certain classes of power bounded operators in Hilbert space. Acta Sci. Math. Szeged, 1966, 27: 17～25

114 Tao Z-G. Analytic operator functions. J. Math. Anal. Appl., 1984, 103: 293～320

115 Tao Z-G. On the operator equation $f(A)=A$, Acta Math. Sinica, New Ser., 1985, 1: 327～334

116 Tao Z-G. Iteration of analytic normal functions of matrices. Chin. Ann. of Math., 1985, 6B(1): 97～102

117 Tao Z-G. Julia's lemma for anlytic operator functios. Chin. Ann. of Math., 1988, 9B(2): 156～160

118 Tao Z-G. Uniqueness of the solution to the operator equation $f(A)=A$. J. Math. Res. Exp., 1990, 10(1): 51～55

119 Tao Z-G. On the operator equation $f(A)=A$ (Ⅱ). Chin. Ann. of Math., 1991, 12B(2): 175～180

120 Valiron G. Fonctions Analytiques. Paris: Presses Univ. de France, 1954

121 Wiener N. Note on a paper of M. Banach. Fund. Math., 1923, 4: 136～143

122 Wolff J. Sur une generalisation d'un theoreme de Schwarz. C. R. . Acad. Sci. Paris, 1926, 182: 918～920

123 Zhu J. The Riesz-Dunford integral of analytic operator functions. J. Math. Res. Exp., 1990, 10(1): 611～614

重印后记

本书发行不到半年就脱销，出版社决定重印，这是我没有预料到的。我很受鼓舞，现在借重印之机将初版中一些文字上的错漏加以订正、修改，但整体内容和叙述仍保持原貌未作更动，恳请专家、读者不吝赐教。

我十分怀念恩师李国平先生，他虽去世一年有余，但每每回忆起他对我的指导和教诲，感激之情便油然而生。谨借此书再版，再次表达对他老人家的深切怀念！

蹇 明

1997.6.10.